PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 26. 15. Dezember 1910. 11. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 1 am 24. Dezember 1910.

INHALT:

Originalmitteilungen:

P. Gmelin, Über das Verhalten der Quecksilberlinie 5789,88 im magnetischen Felde. S. 1193.

R. W. Wood, Die Resonanzspektren des Jods. S. 1195.

A. Kalähne, Die Normalkoordinaten in der mathematischen Behandlung gekoppelter Schwingungen. S. 1196.

A. Stein, Über molekulare Schwingungen fester Körper. S. 1209.

J. Elster u. H. Geitel, Messungen der Abnahme des Mondlichtes während der Mondfinsternis vom 16.—17. November d. J. S. 1212.

P. P. Ewald, Über die Messung der Vertikalkomponente des Windes mittels des Vertikalanemometers. S. 1214.

F. Bidlingmaier, Über das Wesen der säkulären Variation des Erdmagnetismus und Bestimmung ihres Ursprungsortes im Erdinnern. S. 1216.

H. Hörig, Eine Hochspannungsbatterie für statische Zwecke. S. 1222.

P. L. Mercanton, Ein vereinfachtes Funkenphosphoroskop. S. 1226.

C. Leiß, Apparat zur Ausmessung von Spektren. S. 1227.

Vorträge und Diskussionen von der 82. Naturforscherversammlung zu Königsberg:

Aus der gemeinsamen Sitzung beider Hauptgruppen:

J. Zenneck, Die Verwertung des Luftstickstoffs mit Hilfe des elektrischen Flammenbogens. S. 1228.

Vorträge und Reden:

H. A. Lorentz, Alte und neue Fragen der Physik. S. 1234.

Besprechungen:

E. Fabry, Probleme und Aufgaben aus der reinen Mathematik. S. 1257.

Wa. Ostwald, Schule der Elektrizität. S. 1258.

K. Kraus, Methodik der Naturlehre. S. 1258.

F. Auerbach, Geschichtstafeln der Physik. S. 1258.

Kolloidchemische Beihefte. S. 1258.

J. v. Schroeder, Zur Kenntnis des Gerbprozesses. S. 1258.

H. Schmidt, Die Standentwicklung und ihre Arbeiten. S. 1259.

E. Philippi, Über Ausschaltvorgänge und magnetische Funkenlöschung. S. 1259.

L. Barbillion, Die elektrischen Zähler für Gleich- und Wechselstrom. S. 1259.

F. Dannemann, Aus der Werkstatt großer Forscher. S. 1259.

H. Dreisbach, Die Telegraphen Meßkunde. S. 1259.

Berichtigung. S. 1260.

Personalien. S. 1260.

Gesuche. S. 1260.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über das Verhalten der Quecksilberlinie 5789,88 im magnetischen Felde.

Von P. Gmelin.

Der Zeemaneffekt der Quecksilberlinie 5790,87 ist insofern bemerkenswert, als die mittlere parallel den Kraftlinien schwingende Komponente des Zeemantripletts sich proportional dem Quadrat der Feldstärke nach Rot verschiebt[1]). Nach Blau besitzt diese Linie einen Satelliten 5789,88[2]), dessen Schwingungen mit den Schwingungen der Hauptlinie nach den Seriengesetzen eng verknüpft sind. Da das merkwürdige Verhalten der Hauptlinie im Magnetfeld, welche nach den Seriengesetzen wahrscheinlich ein normales Triplett sein sollte[3]), durch den nahen Trabanten verursacht sein konnte, empfahl mir Herr Prof. Paschen, diesen Trabanten im Magnetfeld zu beobachten.

Zur Untersuchung einer etwaigen Verschiebung der Linie würde sich ein Stufengitter wegen seiner hohen Dispersion und Lichtstärke am besten eignen. Nun liegen aber die Dispersionsverhältnisse des hiesigen Stufengitters für vorliegende Untersuchung zufällig äußerst ungünstig, da die besagte Nebenlinie mit dem Trabanten + 0,132 koinzidiert[1]), wodurch die Übersicht über die Veränderungen der Linie im Magnetfeld stark notleiden würde.

Ich entschloß mich daher, die Untersuchung mit dem Rowlandkonkavgitter des hiesigen Instituts so exakt wie nur möglich durchzuführen. Um stigmatische Abbildung zu erzielen, wurde das Gitter, auf das von einem Hohlspiegel ein annähernd paralleles Büschel fiel, so justiert, daß die untersuchte Linie in die Gitternormale fiel.

Das Gitter von 6,5 m Krümmungsradius ist von Herrn Färber[2]) beschrieben, ebenso der benutzte Elektromagnet.

Besondere Sorgfalt mußte auf die Herstellung der Geißlerröhren verwendet werden. Der relativ lichtschwache Trabant zeigte sich nur dann hell und dauernd im Spektrum, wenn die benutzte Geißlerröhre vor dem Abschmelzen von der Luftpumpe unter Erhitzen und Nachpumpen bis auf äußerstes Vakuum ca. $^1/_2$ Stunde lang mit Induktorium betrieben wurde.

Die okulare qualitative Untersuchung ergab folgende Resultate:

1. Der Trabant rückt mit wachsendem Magnetfeld stark nach Violett. Die Richtung der Verschiebung bleibt beim Kommutieren des Magnetfelds erhalten.

1) P. Gmelin, diese Zeitschr. **9**, 212, 1908.

2) Wellenlänge nach F. Paschen, Ann. d. Phys. **30**, 750, 1909.

3) Bemerkung v. F. Paschen veröffentlicht im Vortrag Brüssel 1910.

1) Vgl. P. Gmelin, Ann. d. Phys. **33**, 26, 1910.

2) A. Färber, Ann. d. Phys. **9**, 886, 1902.

Fig. 1.

2. Er spaltet sich in ein merklich symmetrisches Triplett, dessen äußere Komponenten beträchtlich lichtschwächer sind als die Mittellinie.

3. Die nach Violett hin verschobene Komponente schwingt senkrecht, die nach Rot hin gelegene parallel zu den magnetischen Kraftlinien. Die Mittellinie scheint nicht polarisiert zu sein, da sie bei keiner Stellung des benutzten Analysatornicols verschwindet. Sie ist in den Schwingungsrichtungen parallel und senk-

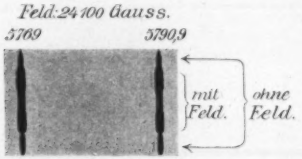


Fig. 2.

recht zu den Kraftlinien immer noch lichtstärker als die betreffende nicht ausgelöschte äußere Komponente. Vergrößerung 1 (8 fach) zeigt in ihrer oberen Hälfte die Schwingungen senkrecht, in der unteren die parallel zu den Kraftlinien in einem Magnetfeld von ca. 34 500 Gauß; die Linearpolarisation wurde durch Vorschalten eines Kalkspathomboeders erzeugt.

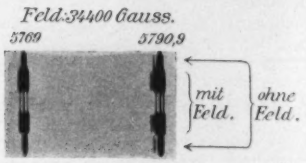


Fig. 3.

Um die Stärke der Magnetfelder aus den Aufspaltungen der gelben Linien 5769 und 5790,9 bestimmen zu können, war es notwendig, diese Linien teilweise kürzer zu belichten als die Linie 5789,9. Durch geeignete Blenden vor dem Spalt ließen sich bequem auszumessende Photogramme erzielen, wie die Figuren 2 und 3 in achtfacher Vergrößerung zeigen. Zur Be-

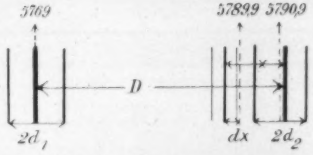


Fig. 4.

rechnung der Feldstärken und der Wellenlängenänderung des Trabanten wurden die gegenseitigen Abstände der äußeren Komponenten der Linien 5769 und 5790.9 und der mittleren Komponente des Trabanten mit einem Zeißschen Komparator gemessen. Die spezifischen Aufspaltungen der erstgenannten Linien wurden nach den Messungen des Verfassers[1]) zu 10,73 bezw. 9,91 angenommen.

Die Wellenlänge des Trabanten konnte

$\lambda_1 = 5769{,}598$ A.-E.; $\lambda_2 = 5790{,}659$ A.-E.

Nr. der Aufnahme	33.	21.	34.	25.	18.	26.	20.	15.	22.
$2d_1$ (μ)	107,7	170,5	193,1	216,1	232,0	239,2	242,6	243,1	246,8
$2d_2$ „	99,5	159,2	179,4	198,6	213,9	221,1	227,1	228,3	227,1
x „	227,7	244,8	253,7	251,4	256,6	255,9	257,1	259,3	259,8
D „	4171,2	4171,9	4172,8	4177,1	4177,1	4175,2	4176,1	4178,0	4176,5
$H\lambda_1$ (Gauß)	15196	24098	27286	30505	32784	33781	34254	34292	34844
H (Mittelwerte aus λ_1 und λ_2)	15157	24142	27267	30320	32620	33672	34360	34454	34654
$H\lambda_2$	15119	24186	27248	30134	32456	33563	34467	34616	34464
$-d\lambda_x$ (A.-E.)	0,151	0,237	0,2815	0,269	0,295	0,292	0,298	0,307	0,311
$\frac{d\lambda_x}{H} \cdot 10^{12}$	9,94	9,81	10,32	8,86	9,04	8,67	8,66	8,92	8,98
$\frac{d\lambda_x}{H^2} \cdot 10^{17}$	6,56	4,06	3,79	2,92	2,77	2,57	2,52	2,59	2,59

1) P. Gmelin, Ann. d. Phys. **28**, 1084, 1909.

nach zahlreichen früheren Bestimmungen[1]) als bekannt angenommen werden (— 0,999 A.-E. Abstand von der Linie 5790,9), sie wurde daher nicht neu bestimmt.

Fig. 4 und die vorstehende Tabelle geben einen Überblick über die Resultate der Messungen.

Die zwei letzten Spalten der Tabelle zeigen, daß die Verschiebung des Trabanten nicht (wie die der Linie 5790,9) proportional H^2, sondern merklich linear mit der Feldstärke wächst, d. h. es ist

$$d\lambda_x = C \cdot H.$$

Aus obigen Werten ergibt sich im Mittel $C = -9{,}25 \cdot 10^{-13}$.

Die spezifische Aufspaltung des Trabanten wurde, so gut es bei den ungünstigen Dispersionsverhältnissen möglich war, zu

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 H} = 4{,}8 \cdot 10^{-5}$$

bestimmt.

Die Abweichungen der Werte für $\frac{d\lambda x}{H}$ bei verschiedenen Aufnahmen sind ziemlich groß. Sie lassen sich jedoch sehr wohl als reine Beobachtungsfehler deuten, wenn man bedenkt, daß ein Fehler von 1 Proz. bei der Messung von x (Tabelle Spalte 4) für den in die Rechnung eingehenden Wert dx schon einen Fehler von ca. 5 Proz. bedeutet. Da die Messung von H noch weitere Fehlerquellen in sich schließt, so ist ein Gesamtfehler von 7 bis 8 Proz. sehr gut möglich. Nur die Anwendung höherer Dispersion könnte die Fehler verringern.

Der untersuchte Effekt stellt einen neuen anormalen Typus des Zeemanphänomens dar, da es sich um ganz außergewöhnliche Polarisationsverhältnisse und um ein Triplett handelt, das samt seinen äußeren Komponenten zur Seite rückt im Gegensatz zu dem unsymmetrischen Triplett 5790,9, bei dem nur die mittlere Komponente sich verschiebt. Die Theorien des anormalen Zeemaneffekts geben noch keine Erklärung für diese Erscheinung.

1) Zusammenstellung siehe bei P. Gmelin, Ann. d. Phys. **33**, 29, 1910.

Tübingen, Physik. Institut, Nov. 1910.

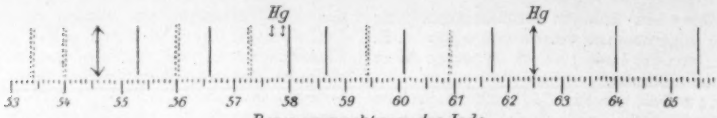
(Eingegangen 26. November 1910.)

Die Resonanzspektren des Jods.
(The Resonance Spectra of Jodine.)

Von R. W. Wood.

Wie ich in früheren Arbeiten gezeigt habe, kann man das komplizierte kannelierte (von Banden durchzogene) Absorptionsspektrum und das entsprechende von Banden durchzogene Emissionsspektrum des durch weißes Licht zur Fluoreszenz erregten Natriumdampfes in viele einfache Serien (nahezu) äquidistanter Linien zerlegen, wenn man die Fluoreszenz durch monochromatisches Licht verschiedener Wellenlängen erregt, wie man es von Metallichtbögen oder von Vakuumröhren erhält. Ich habe diese Spektren Resonanzspektren genannt und habe auch gezeigt, daß das Fluoreszenzspektrum des Jods dem des Natriums ähnelt; ich habe nunmehr gefunden, daß man dieses Fluoreszenzspektrum in derselben Weise durch monochromatisches Licht erregen und Resonanzspektren liefern lassen kann. Bisher habe ich zur Erregung nur eine einzige Lichtquelle versucht, nämlich den Quecksilberlichtbogen; dessen aktive Linie ist die grüne Linie bei 5460 Ä.-E.; das kann man dadurch nachweisen, daß man verschiedene Strahlungsfilter zwischen die Lampe und den Kolben mit dem Joddampf einschaltet. Ich verwende jetzt sehr große Kolben von 20 bis 30 cm Durchmesser, die ich aus Flaschen mit rundem Boden herstelle. Der Hals wird in der Gebläseflamme ausgezogen, ein paar kleine Jodkristalle werden eingeführt, und dann wird der Kolben mittels einer Gaedepumpe sehr weitgehend entluftet. Darauf wird der Hals zugeschmolzen. Wenn man das Licht des Kohlenbogens auf die Mitte des Kolbens mittels einer Kondensorlinse, am besten mittels des Kondensors einer großen Projektionslampe, fokussiert, so ist die Fluoreszenz so hell, daß man sie vom Ende des größten Hörsaales aus sehen kann. Es ist keinerlei Erwärmung des Kolbens erforderlich. Als ich mit Sonnenlicht belichtete, das mittels eines großen Voigtländerschen Porträtobjektivs (F. 2,3) kondensiert wurde, fand ich, daß die Intensität des Fluoreszenzlichtes im grünen Teile des Spektrums nahezu $^1/_3$ der Intensität des Auerlichtes betrug. Diese Versuche werde ich in einer späteren Veröffentlichung ausführlich beschreiben, denn der Zweck der vorliegenden Mitteilung besteht nur darin, die Entdeckung der Resonanzspektren des Dampfes zu verzeichnen.

Wenn man das Licht des Quecksilberbogens (Heraeus) auf das Zentrum des Kolbens fokussiert, so erhält man eine rötlichgelbe Fluoreszenz, die in Farbe ganz verschieden ist von der gelblichgrünen Fluoreszenz, die man mit weißem Lichte erhält. Das Spektroskop zeigt uns, daß wir statt einer ungeheuren Anzahl von Linien, wie sie die charakteristischen Banden des Jodspektrums bilden, eine schöne Serie von isolierten Linien haben, die durch Abstände voneinander getrennt sind, deren Größe zwischen 65 und 70 Ångströmeinheiten schwankt. Die Wellenlängen habe ich



Resonanzspektrum des Jods.

einstweilen nur mit einem Wellenlängenspektroskop von Hilger bestimmt, und sie können nur als bis auf etwa 5 Angströmeinheiten richtig angesehen werden. Man wird das Spektrum mit hoher Dispersion photographieren müssen, wie es beim Natriumdampf geschehen ist. Das allgemeine Aussehen des Spektrums ist in der Figur wiedergegeben.

Die durch Pfeile bezeichneten Linien sind die Linien des Quecksilberlichtbogens, die gewöhnlich infolge diffusen Lichtes erscheinen, sofern man nicht große Vorsichtsmaßregeln anwendet. Die grüne Linie erscheint immer, da sie die erregende Linie ist und die Wellen teilweise ohne Änderung der Wellenlänge wieder emittiert werden. Eine solche Wiederemission habe ich als „Resonanzstrahlung" bezeichnet. Die übrigen Linien bilden zusammen mit der grünen Linie 546 $\mu\mu$ das „Resonanzspektrum". In diesem finden wir zwei starke Linien, zwei sehr schwache zwischen der grünen und der doppelten gelben Linie des Quecksilberspektrums und sieben oder acht Linien im Rot. Die schwachen Linien sind durch die gestrichelten Linien bezeichnet.

Es erscheinen weiter zwei Linien von kürzerer Wellenlänge als die erregende Linie. Es scheint wahrscheinlich, daß es gelingen wird, mit Joddampf noch mehr zu erreichen, als man mit Natriumdampf erreicht hat, da man bei Zimmertemperatur mit Glaskolben arbeiten kann. Ich beabsichtige, die Arbeit unter Verwendung anderer monochromatischer Lichtquellen zur Erregung des Dampfes fortzusetzen, und das Verhalten der Resonanzspektren in einem Magnetfeld zu untersuchen. Ebenso wird es äußerst interessant sein, die Änderungen der Resonanzspektren zu beobachten, die vermutlich auftreten werden, wenn man die erregende Lichtquelle in ein starkes Magnetfeld bringt.

Berlin, Physikalisches Institut der Universität.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 1. Dezember 1910.)

Die Normalkoordinaten in der mathematischen Behandlung gekoppelter Schwingungen.

Von A. Kalähne.

1. Die Differentialgleichungen der natürlichen oder Eigenschwingungen gekoppelter Schwingungssysteme lassen sich bekanntlich, wenn es sich um lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten handelt, nach der Theorie dieser Gleichungen mittels Exponentialfunktionen bzw. mit den aus ihnen hervorgehenden Sinus- und Kosinusfunktionen immer integrieren. Die Durchführung erfordert aber die Lösung algebraischer Gleichungen von höherem als dem 2. Grade und dadurch wird die Berechnung, insbesondere wenn es sich um Zahlenrechnungen handelt, äußerst unübersichtlich und umständlich. Bei gekoppelten Systemen, wie sie bei elektrischen Schwingungen in der drahtlosen Telegraphie auftreten, die aus zwei Teilsystemen mit je einem Freiheitsgrad bestehen, ist die zu lösende algebraische Gleichung, die charakteristische oder determinierende Gleichung, vom 4. Grad. Bei Verkoppelung dreier solcher Systeme würde sie vom 6. Grad sein usw.

Es ist deshalb wohl versucht worden, die Lösung durch Transformation der Gleichungen zu vereinfachen und dabei die höheren algebraischen Gleichungen in Fortfall zu bringen. Ein solcher Versuch ist insbesondere von L. Cohen[1]) gemacht worden. Er muß jedoch als mißglückt gelten. Wie ich an anderem Orte[2]) zeigen werde, trifft seine Lösung nur für einen Spezialfall, eine Ausartung des schwingenden Systems zu, die in Wirklichkeit nicht zu realisieren ist.

Ich habe die Frage der Vereinfachung jener Rechnungen ungefähr zur Zeit des Erscheinens dieser Cohenschen Arbeit und zunächst ohne Kenntnis derselben in Angriff genommen, erkannte aber bald, daß der eingeschlagene Weg nicht zu dem gewünschten Ziele führen kann. Daß Herr Cohen scheinbar ein positives Resultat erhielt, veranlaßte mich dann zur Nachprüfung seiner Arbeit mit dem geschilderten Ergebnis.

Herr Cohen hat die Rechnung für elektrische Schwingungssysteme sowohl mit magnetischer Koppelung (bei induktiver Schaltung) als auch mit magnetischer und galvanischer Koppelung (bei direkter Schaltung) nach einer speziellen Methode ausgeführt. Das dem seinigen entgegengesetzte negative Resultat, von dem oben gesprochen wurde, gilt jedoch nicht bloß für

1) L. Cohen, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **2**, 448, 1909.
2) A. Kalähne, ebenda **4**, Heft 4, 1910 (demnächst erscheinend).

diese Spezialfälle, sondern allgemein für gekoppelte Systeme, bei denen gleichzeitig sämtliche möglichen Koppelungsarten vorhanden sind. Die von ihm, wie von mir versuchte Methode besteht im wesentlichen in einer Transformation der Differentialgleichungen mittels linearer Substitution der abhängigen Variablen, wobei den konstanten Koeffizienten der Substitutionsgleichungen solche Werte gegeben werden, daß die transformierten Differentialgleichungen sich durch Wegfall gewisser Glieder vereinfachen. Die Methode ist also, was Herr Cohen nicht besonders hervorhebt, nichts anderes als eine Einführung der sogen. Haupt- oder Normalkoordinaten, die bei ungedämpften gekoppelten Systemen, oder allgemeiner gesprochen, ungedämpften Systemen mit mehreren Freiheitsgraden, eine wesentliche Vereinfachung ergibt. Dies — die Benutzung der Normalkoordinaten — war der Ausgangspunkt meiner Untersuchungen, die aber wie gesagt nicht zum Ziele führten, weil bei gedämpften Systemen die Verhältnisse wesentlich anders liegen als bei ungedämpften. Es soll hier gezeigt werden, inwiefern und weshalb die Methode versagt.

Die Differentialgleichungen gekoppelter Systeme und ihre Integration.

2. Die Differentialgleichungen, um die es sich handelt, lauten für den Fall eines aus zwei Teilsystemen gekoppelten Systems

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\frac{d^2x_1}{dt^2}+a_{12}\frac{d^2x_2}{dt^2}+b_{11}\frac{dx_1}{dt}+b_{12}\frac{dx_2}{dt}+c_{11}x_1+c_{12}x_2=0\\ a_{21}\frac{d^2x_1}{dt^2}+a_{22}\frac{d^2x_2}{dt^2}+b_{21}\frac{dx_1}{dt}+b_{22}\frac{dx_2}{dt}+c_{21}x_1+c_{22}x_2=0 \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Hierin sind x_1 und x_2 die das erste bzw. zweite Teilsystem bestimmenden abhängigen Variablen (Koordinaten), z. B. elektrische Stromstärke oder Spannung u. dgl.; t ist die Zeit. Die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, b_{11} . . usw. werden als konstant angenommen. Die Gleichungen unterscheiden sich von den Schwingungsgleichungen freier gedämpfter Systeme, die exponentiell gedämpfte Sinusschwingungen ausführen, nur durch den Hinzutritt der Koppelungsglieder, welche hier von dem zweiten, vierten und sechsten Gliede jeder der beiden Gleichungen dargestellt werden.

Die Gleichungen lassen sich etwas umformen, indem man die erste durch a_{11}, die zweite durch a_{22} dividiert und für die neuen Koeffizienten andere Bezeichnungen nach dem Vorgang von M. Wien[1]) einführt.

Setzt man[1])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{b_{11}}{a_{11}}=2\delta_1,\ \frac{b_{22}}{a_{22}}=2\delta_2 && \text{(Dämpfungskonstanten)}\\ &\frac{c_{11}}{a_{11}}=n_1^2,\ \frac{c_{22}}{a_{22}}=n_2^2 && \text{(Frequenzkonstanten)}\\ &\frac{a_{12}}{a_{11}}=\varrho_1,\ \frac{b_{12}}{b_{11}}=\sigma_1,\ \frac{c_{12}}{c_{11}}=\vartheta_1 \\ &\frac{a_{21}}{a_{22}}=\varrho_2,\ \frac{b_{21}}{b_{22}}=\sigma_2,\ \frac{c_{21}}{c_{22}}=\vartheta_2 && \text{(Koppelungskoeffizienten)}\\ &\text{also}\\ &\frac{b_{12}}{a_{11}}=2\delta_1\sigma_1,\ \frac{c_{12}}{a_{11}}=n_1^2\vartheta_1\\ &\frac{b_{21}}{a_{22}}=2\delta_2\sigma_2,\ \frac{c_{21}}{a_{22}}=n_2^2\vartheta_2, \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

so kann man Gl. (1) mit anderer Reihenfolge der Glieder schreiben

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2}+2\delta_1\frac{dx_1}{dt}+n_1^2x_1+\varrho_1\frac{d^2x_2}{dt^2}+2\delta_1\sigma_1\frac{dx_2}{dt}+n_1^2\vartheta_1x_2=0\\ \frac{d^2x_2}{dt^2}+2\delta_2\frac{dx_2}{dt}+n_2^2x_2+\varrho_2\frac{d^2x_1}{dt^2}+2\delta_2\sigma_2\frac{dx_1}{dt}+n_2^2\vartheta_2x_1=0 \end{aligned}\right| \qquad (1a)$$

Hier sind δ die Dämpfungen und n die (Kreis-) Frequenzen der (ungedämpften) freien Schwingungen; ϱ, σ, ϑ sind die Koppelungskoeffizienten in der ursprünglichen Wienschen Bezeichnungsweise. Und zwar gilt ϱ für die Beschleunigungs-, σ für die Reibungs-, ϑ für die Kraftkoppelung, denen bei elektrischem System in derselben Reihenfolge die magnetische (induktive), die Widerstands- (galvanische) und die elektrische (Kapazitäts-) Koppelung entsprechen. Die beiden letztgenannten sind hier jedoch in etwas anderem Sinne als gewöhnlich gebraucht. Ist nur eine Art der Koppelung vorhanden, z. B. magnetische (Beschleunigungs-) Koppelung, so fallen die Glieder mit σ und ϑ weg, und das geometrische Mittel aus den Koeffizienten ϱ_1 und ϱ_2, also $K=\sqrt{\varrho_1\varrho_2}$ wird dann bekanntlich in neuerer Bezeichnungsweise Koppelungskoeffizient oder auch Koppelungsparameter genannt.

Bei elektrischen Schwingungssystemen sind die Größen x_1 und x_2 entweder Stromstärken J oder Spannungen V und die Koeffizienten

1) M. Wien, Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. **61**, 151, 1897.

1) Es ist δ, n, ϑ gewählt, statt der Bezeichnung k, k, τ, die Wien zuerst benutzt hat.

a, b, c sind Koeffizienten der Selbst- und Wechselinduktion, Kapazitäten und Ohmsche Widerstände bzw. aus diesen zusammengesetzte Größen. Z. B. werden bei induktiver Schaltung (mit rein magnetischer Koppelung) die Gl. (1) für die Spannung als abhängige Variable

$$\left.\begin{aligned} L_1C_1\frac{d^2V_1}{dt^2}+R_1C_1\frac{dV_1}{dt}+V_1+L_{12}C_2\frac{d^2V_2}{dt^2}=0\\ L_2C_2\frac{d^2V_2}{dt^2}+R_2C_2\frac{dV_2}{dt}+V_2+L_{12}C_1\frac{d^2V_1}{dt^2}=0\end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Hierbei sind L, C, R die Selbstinduktionskoeffizienten, Kapazitäten und Ohmschen Widerstände der beiden einzelnen Schwingungskreise, L_{12} ihr Koeffizient der wechselseitigen Induktion. Die Koeffizienten der Gl. (2) werden hier im besonderen:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1=\frac{R_1}{2L_1},\ \delta_2=\frac{R_2}{2L_2}\\ n_1^2=\frac{1}{L_1C_1},\ n_2^2=\frac{1}{L_2C_2}\\ \varrho_1=\frac{L_{12}C_2}{L_1C_1},\ \varrho_2=\frac{L_{12}C_1}{L_2C_2}\\ \sigma_1=\sigma_2=\vartheta_1=\vartheta_2=0\end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Ferner wird

$$K=\sqrt{\varrho_1\varrho_2}=\frac{L_{12}}{\sqrt{L_1L_2}}$$

3. Die Integration der Gl. (1) bzw. (1a) wird, wie bekannt, nach der Methode der Partikulärintegrale durch den Ansatz ausgeführt

$$x_1=a_1e^{\mu t},\quad x_2=a_2e^{\mu t}, \qquad (5)$$

wobei a_1, a_2 und μ Konstanten, im allgemeinen mit komplexen Werten sind. Durch Einsetzen der Werte (5) von x_1 und x_2 in (1) und Wegheben des gemeinsamen Faktors $e^{\mu t}$ aus allen Gliedern erhält man nach einfacher Umformung die Bedingungsgleichungen, welchen a_1, a_2, μ genügen müssen

$$\frac{a_2}{a_1}=-\frac{a_{11}\mu^2+b_{11}\mu+c_{11}}{a_{12}\mu^2+b_{12}\mu+c_{12}}\ \text{und}\ \frac{a_2}{a_1}=-\frac{a_{21}\mu^2+b_{21}\mu+c_{21}}{a_{22}\mu^2+b_{22}\mu+c_{22}}. \qquad (6)$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke folgt hieraus weiter die „charakteristische" Gleichung 4. Grades für μ

$$(a_{11}\mu^2+b_{11}\mu+c_{11})(a_{22}\mu^2+b_{22}\mu+c_{22})=(a_{12}\mu^2+b_{12}\mu+c_{12})(a_{21}\mu^2+b_{21}\mu+c_{21}) \qquad (7)$$

oder aufgelöst

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\mu^4+(a_{11}b_{22}-a_{12}b_{21}+b_{11}a_{22}-b_{12}a_{21})\mu^3+(a_{11}c_{22}-a_{12}c_{21}+b_{11}b_{22}\\ -b_{12}b_{21}+c_{11}a_{22}-c_{12}a_{21})\mu^2+(b_{11}c_{22}-b_{12}c_{21}+c_{11}b_{22}-c_{12}b_{21})\mu+c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=0\end{aligned}\right| \qquad (7a)$$

Durch Einführung der Wienschen Koppelungskoeffizienten ϱ, σ, ϑ Gl. (2) geht sie über in

$$\left.\begin{aligned}(1-\varrho_1\varrho_2)\mu^4+2(\delta_2-\varrho_1\delta_2\sigma_2+\delta_1-\varrho_2\delta_1\sigma_1)\mu^3+(n_2^2-\varrho_1n_2^2\vartheta_2+4\delta_1\delta_2-4\delta_1\delta_2\sigma_1\sigma_2\\ +n_1^2-\varrho_2n_1^2\vartheta_1)\mu^2+2(\delta_1n_2^2-\delta_1\sigma_1n_2^2\vartheta_2+\delta_2n_1^2-\delta_2\sigma_2n_1^2\vartheta_1)\mu+n_1^2n_2^2(1-\vartheta_1\vartheta_2)=0\end{aligned}\right| \qquad (7b)$$

Die allgemeinen Integrale x_1 und x_2 erhält man, indem man mittels der 4 aus Gl. (7) folgenden μ-Werte die 4 verschiedenen partikulären Integrale $a_1'e^{\mu_1 t}$, $a_1''e^{\mu_2 t}$, $a_1'''e^{\mu_3 t}$, $a_1''''e^{\mu_4 t}$ für x_1 und analog $a_2'e^{\mu_1 t}$ usw. für x_2 bildet und addiert. Dabei ist darauf zu achten, daß immer das Verhältnis $\frac{a_2'}{a_1'}$, $\frac{a_2''}{a_1''}$ usw. den durch Gl. (6) mit dem zugehörigen μ bestimmten vorgeschriebenen Wert besitzt. Die allgemeine Lösung besitzt demnach, wie es sein muß, vier willkürliche Integrationskonstanten, z. B. die vier Größen a_1', a_1'', a_1''', a_1'''' und nicht acht, da die vier anderen, nämlich a_2', a_2'' usw. durch die ersteren mittels (6) schon bestimmt sind.

Die Werte von μ ergeben sich bei den zu Schwingungen befähigten Systemen in komplexer Form, also

$$\left.\begin{matrix}\mu_{\mathrm{I}}\\ \mu_{\mathrm{II}}\end{matrix}\right\} = -\delta_1' \pm i\nu_1',\quad \left.\begin{matrix}\mu_{\mathrm{III}}\\ \mu_{\mathrm{IV}}\end{matrix}\right\} = -\delta_2' \pm i\nu_2'.$$

Es sind δ_1' und δ_2' die Dämpfungskonstanten (Dämpfungen), ν_1' und ν_2' die (Kreis-) Frequenzen (zyklischen Schwingungszahlen) der gekoppelten Schwingungen. Diese Größen, auf deren Werte es häufig allein ankommt, ergeben sich also aus der Berechnung von μ.

Einführung neuer Variabler durch lineare Substitution.

4. Wir wollen nunmehr statt x_1 und x_2 neue Variable ξ_1 und ξ_2 einführen und zwar, wie Herr Cohen, mittels einer linearen Substitution.

Wir setzen[1])

$$\left.\begin{aligned}x_1=\beta_{11}\xi_1+\beta_{21}\xi_2\\ x_2=\beta_{12}\xi_1+\beta_{22}\xi_2\end{aligned}\right| \qquad (8)$$

1) Herr Cohen hat die Bezeichnung

$$V_1=m_1w_1+m_2w_2$$

und

$$V_2=m_3w_1+m_4w_2.$$

Der noch etwas allgemeinere Ansatz

$$\left.\begin{aligned}x_1=\beta_{01}\xi_0+\beta_{11}\xi_1+\beta_{21}\xi_2\\ x_2=\beta_{02}\xi_0+\beta_{12}\xi_1+\beta_{22}\xi_2,\end{aligned}\right| \qquad (8a)$$

woraus umgekehrt folgt:

$$\xi_1 = \frac{\beta_{22}x_1 - \beta_{21}x_2}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \qquad \xi_2 = \frac{-\beta_{12}x_1 + \beta_{11}x_2}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}} = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \tag{9}$$

Durch Einsetzen dieser Werte (8) in Gl. (1) erhält man die ganz gleich gebauten Gleichungen für ξ_1 und ξ_2

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_{11}\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \mathfrak{A}_{12}\frac{d^2\xi_2}{dt^2} + \mathfrak{B}_{11}\frac{d\xi_1}{dt} + \mathfrak{B}_{12}\frac{d\xi_2}{dt} + \mathfrak{C}_{11}\xi_1 + \mathfrak{C}_{12}\xi_2 = 0 \\ \mathfrak{A}_{21}\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \mathfrak{A}_{22}\frac{d^2\xi_2}{dt^2} + \mathfrak{B}_{21}\frac{d\xi_1}{dt} + \mathfrak{B}_{22}\frac{d\xi_2}{dt} + \mathfrak{C}_{21}\xi_1 + \mathfrak{C}_{22}\xi_2 = 0 \end{aligned}\right| \tag{10}$$

Die Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ haben, wie man leicht berechnet, die Form[1])

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_{11} &= a_{11}\beta_{11} + a_{12}\beta_{12},\ \mathfrak{A}_{12} = a_{11}\beta_{21} + a_{12}\beta_{22} \\ \mathfrak{A}_{21} &= a_{21}\beta_{11} + a_{22}\beta_{12},\ \mathfrak{A}_{22} = a_{21}\beta_{21} + a_{22}\beta_{22} \\ \mathfrak{B}_{11} &= b_{11}\beta_{11} + b_{12}\beta_{12},\ \mathfrak{B}_{12} = b_{11}\beta_{21} + b_{12}\beta_{22} \\ \mathfrak{B}_{21} &= b_{21}\beta_{11} + b_{22}\beta_{12},\ \mathfrak{B}_{22} = b_{21}\beta_{21} + b_{22}\beta_{22} \\ \mathfrak{C}_{11} &= c_{11}\beta_{11} + c_{12}\beta_{12},\ \mathfrak{C}_{12} = c_{11}\beta_{21} + c_{12}\beta_{22} \\ \mathfrak{C}_{21} &= c_{21}\beta_{11} + c_{22}\beta_{12},\ \mathfrak{C}_{22} = c_{21}\beta_{21} + c_{22}\beta_{22} \end{aligned}\right| \tag{11}$$

oder in Summenform geschrieben, wobei sie allgemeiner für ein System von m-Freiheitsgraden gelten

$$\mathfrak{A}_{hk} = \sum_{i=1}^{m} a_{hi}\beta_{ki},\quad \mathfrak{B}_{hk} = \sum_{i=1}^{m} b_{hi}\beta_{ki},\quad \mathfrak{C}_{hk} = \sum_{i=1}^{m} c_{hi}\beta_{ki}. \tag{12}$$

Die Gleichungen (10) werden analog wie (1) durch den Ansatz gelöst

$$\xi_1 = \mathfrak{A}_1 e^{\lambda t},\quad \xi_2 = \mathfrak{A}_2 e^{\lambda t}, \tag{13}$$

der zu Bestimmungsgleichungen für $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, λ führt, welche mit den Gleichungen (6), 7 und 7a bzw. 7b ganz gleich gebaut sind. Insbesondere wird die determinierende oder charakteristische Gleichung hier

$$\left.\begin{aligned} &(\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{21})\,\lambda^4 + (\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{22} - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{21} + \mathfrak{B}_{11}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{B}_{12}\mathfrak{A}_{21})\,\lambda^3 \\ &+ (\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{C}_{22} - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{C}_{21} + \mathfrak{B}_{11}\mathfrak{B}_{22} - \mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{21} + \mathfrak{C}_{11}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{C}_{12}\mathfrak{A}_{21})\,\lambda^2 \\ &+ (\mathfrak{B}_{11}\mathfrak{C}_{22} - \mathfrak{B}_{12}\mathfrak{C}_{21} + \mathfrak{C}_{11}\mathfrak{B}_{22} - \mathfrak{C}_{12}\mathfrak{B}_{21})\,\lambda + \mathfrak{C}_{11}\mathfrak{C}_{22} - \mathfrak{C}_{12}\mathfrak{C}_{21} = 0 \end{aligned}\right| \tag{14}$$

gemacht, so geht (14) in eine Gleichung 3. Grades über, werden die Koeffizienten von λ^3 und λ gleichzeitig Null, so erhält man eine quadratische Gleichung für λ^2 usw.

5. Man kann nun — darauf kommt auch das Cohensche Verfahren im Grunde genommen hinaus — versuchen, durch geeignete Wahl der Transformationskoeffizienten β in (8) die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ so zu bestimmen, daß die Koeffizienten gewisser Potenzen von λ in dieser Gleichung verschwinden und die Gleichung auf einen geringeren Grad reduziert wird. Wird das konstante Glied $\mathfrak{C}_{11}\mathfrak{C}_{22} - \mathfrak{C}_{12}\mathfrak{C}_{21}$ oder der Koeffizient $\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{21}$ von λ^4 zu Null

Die verschiedenen soeben berührten Fälle, in denen eine Vereinfachung der charakteristischen Gleichung (14) stattfinden könnte, erledigen sich aber sofort, wenn man die Koeffizienten dieser Gleichung ausrechnet. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{21} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) \\ &\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{22} - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{21} + \mathfrak{B}_{11}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{B}_{12}\mathfrak{A}_{21} = (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} + b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21})(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) \\ &\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{C}_{22} - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{C}_{21} + \mathfrak{B}_{11}\mathfrak{B}_{22} - \mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{21} + \mathfrak{C}_{11}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{C}_{12}\mathfrak{A}_{21} = (a_{11}c_{22} - a_{12}c_{21} + b_{11}b_{22} \\ &\qquad - b_{12}b_{21} + c_{11}a_{22} - c_{12}a_{21})(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) \\ &\mathfrak{B}_{11}\mathfrak{C}_{22} - \mathfrak{B}_{12}\mathfrak{C}_{21} + \mathfrak{C}_{11}\mathfrak{B}_{22} - \mathfrak{C}_{12}\mathfrak{B}_{21} = (b_{11}c_{22} - b_{12}c_{21} + c_{11}b_{22} - c_{12}b_{21})(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) \\ &\mathfrak{C}_{11}\mathfrak{C}_{22} - \mathfrak{C}_{12}\mathfrak{C}_{21} = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) \end{aligned}\right| \tag{15}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die angewandte lineare Transformation keine Vereinfachung bewirken kann, die nicht schon infolge besonderer Beziehungen zwischen den Koeffizienten a_{11}, b_{11}, .. a_{12}, a_{21} ... usw. in der ursprünglichen „Charakteristik" Gl. (7) vorhanden ist. Denn die neuen Koeffizienten sind alle gleich den alten, multipliziert mit $\beta_{11}\beta_{12} - \beta_{12}\beta_{21}$, d. h. mit der Determinante der Substitutionskoeffizienten β. Man kann also auch nicht dadurch, daß man diese Determinante zu Null macht, ein oder mehrere Glieder von (14) beseitigen; denn dann werden alle Glieder gleich Null, weil alle Koeffizienten die Determinante als Faktor haben.

wo β_{01}, β_{02} und ξ_0 konstante Werte darstellen, ergibt nichts wesentlich anderes. Es treten dabei in (10) noch konstante, treibende Kräfte darstellende, Glieder $\mathfrak{C}_{10}\xi_0$ bzw. $\mathfrak{C}_{20}\xi_0$ zu den mit den Koordinaten ξ_1 und ξ_2 proportionalen Gliedern (den rücktreibenden Kräften) hinzu, wodurch diese Differentialgleichungen nichthomogen werden. Das Vorhandensein dieser konstanten, nicht von ξ_1 und ξ_2 abhängigen, Glieder bewirkt aber nur eine Nullpunktsverschiebung der Integrale ξ_1 und ξ_2, indem diese sich nunmehr additiv aus den Integralen der homogenen Gl. (10) und einer Konstanten zusammensetzen.

1) Bei Annahme der Substitution (8a) in der Anmerk. auf S. 1198 wird außerdem

$$\mathfrak{C}_{10} = c_{11}\beta_{01} + c_{12}\beta_{02}$$
$$\mathfrak{C}_{20} = c_{21}\beta_{01} + c_{22}\beta_{02},$$

während die Koeffizienten $\mathfrak{A}_{10}$, $\mathfrak{A}_{20}$, $\mathfrak{B}_{10}$, $\mathfrak{B}_{20}$ gar nicht in Betracht kommen, da die entsprechenden Glieder als Differentialquotienten der konstanten Größe ξ_0 wegfallen.

Die Beziehungen, welche zwischen den Koeffizienten der Schwingungsgleichungen a, b, c bestehen müssen, damit in (7) — und natürlich auch in (14) — gewisse Glieder wegfallen, gelten für extreme, in Wirklichkeit kaum realisierbare Fälle.

Wegfall des Gliedes mit μ^4 bzw. λ^4 findet z. B. statt, wenn

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

oder mit den Wienschen Bezeichnungen, wenn

$$1 - \varrho_1\varrho_2 = 0$$

ist. Das bedeutet, daß einer der Koppelungskoeffizienten ϱ größer als 1 sein muß, wenn nicht beide gleich 1 sind. Für elektromagnetische Systeme heißt das

$$L_1L_2 = M^2,$$

mit anderen Worten: das Quadrat des wechselseitigen Induktionskoeffizienten M muß gleich dem Produkt der beiden Selbstinduktionen sein, eine nicht zu erfüllende Forderung. Ähnliche unerfüllbare Forderungen ergeben sich aus den anderen S. 1199 aufgeführten Fällen.

Die Cohensche Lösung.

6. Die Methode, welche Herr Cohen in der eingangs angeführten Arbeit befolgt, ist etwas anders. Er benutzt die spezielleren Gleichungen (3), die nur je ein Koppelungsglied enthalten. Das macht jedoch keinen grundsätzlichen Unterschied. Wir können die Methode und ihre Schwächen hier am allgemeinen Fall der Gl. (1) zeigen.

Zunächst führt wieder die Substitution (8) zu Gl. (10) mit den Koeffizienten (11). Nun wird aber nicht der Integrationsansatz (13) gemacht, sondern die Gleichungen werden weiter umgeformt. Durch Elimination von $\frac{d^2\xi_2}{dt^2}$ aus der ersten, von $\frac{d^2\xi_1}{dt^2}$ aus der zweiten der Gl. (10) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{12})\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + (\mathfrak{B}_{11}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{B}_{21}\mathfrak{A}_{12})\frac{d\xi_1}{dt} + (\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{B}_{22}\mathfrak{A}_{12})\frac{d\xi_2}{dt}\\ + (\mathfrak{C}_{11}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{C}_{21}\mathfrak{A}_{12})\xi_1 + (\mathfrak{C}_{12}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{C}_{22}\mathfrak{A}_{12})\xi_2 = 0\\ (\mathfrak{A}_{22}\mathfrak{A}_{11} - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{21})\frac{d^2\xi_2}{dt^2} + (\mathfrak{B}_{21}\mathfrak{A}_{11} - \mathfrak{B}_{11}\mathfrak{A}_{21})\frac{d\xi_1}{dt} + (\mathfrak{B}_{22}\mathfrak{A}_{11} - \mathfrak{B}_{12}\mathfrak{A}_{21})\frac{d\xi_2}{dt}\\ + (\mathfrak{C}_{21}\mathfrak{A}_{11} - \mathfrak{C}_{11}\mathfrak{A}_{21})\xi_1 + (\mathfrak{C}_{22}\mathfrak{A}_{11} - \mathfrak{C}_{12}\mathfrak{A}_{21})\xi_2 = 0\end{aligned}\right| \quad (16)$$

Nunmehr werden die Transformationskoeffizienten β — bei Herrn Cohen als m_1, m_2, m_3, m_4 bezeichnet — so bestimmt, daß in der ersten dieser Gleichungen das Glied mit ξ_2, in der zweiten das Glied mit ξ_1 wegfällt. Dazu ist nötig, daß gleichzeitig

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{C}_{12}\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{C}_{22}\mathfrak{A}_{12} = 0\\ \mathfrak{C}_{21}\mathfrak{A}_{11} - \mathfrak{C}_{11}\mathfrak{A}_{21} = 0\end{aligned}\right| \quad (17)$$

ist. Mittels Gl. (11) folgt hieraus, wenn man noch in der zweiten Gl. (17) die Reihenfolge der Glieder vertauscht:

$$\left.\begin{aligned}(c_{11}\beta_{21} + c_{12}\beta_{22})(a_{21}\beta_{21} + a_{22}\beta_{22}) - (c_{21}\beta_{21} + c_{22}\beta_{22})(a_{11}\beta_{21} + a_{12}\beta_{22}) = 0\\ (c_{11}\beta_{11} + c_{12}\beta_{12})(a_{21}\beta_{11} + a_{22}\beta_{12}) - (c_{21}\beta_{11} + c_{22}\beta_{12})(a_{11}\beta_{11} + a_{12}\beta_{12}) = 0\end{aligned}\right| \quad (18)$$

Durch Auflösung der Klammern und geeignete Zusammenfassung erhält man

$$\left.\begin{aligned}(c_{11}a_{21} - c_{21}a_{11})\beta^2_{21} + (c_{12}a_{22} - c_{22}a_{12})\beta^2_{22} + (c_{11}a_{22} - c_{22}a_{11} + c_{12}a_{21} - c_{21}a_{12})\beta_{21}\beta_{22} = 0\\ (c_{11}a_{21} - c_{21}a_{11})\beta^2_{11} + (c_{12}a_{22} - c_{22}a_{12})\beta^2_{12} + (c_{11}a_{22} - c_{22}a_{11} + c_{12}a_{21} - c_{21}a_{12})\beta_{11}\beta_{12} = 0\end{aligned}\right| \quad (19)$$

oder nach Division der ersten dieser Gleichungen mit $\beta_{21}\beta_{22}$, der zweiten mit $\beta_{11}\beta_{12}$

$$\left.\begin{aligned}(c_{11}a_{21} - c_{21}a_{11})\frac{\beta_{21}}{\beta_{22}} + (c_{12}a_{22} - c_{22}a_{12})\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} + c_{11}a_{22} - c_{22}a_{11} + c_{12}a_{21} - c_{21}a_{12} = 0\\ (c_{11}a_{21} - c_{21}a_{11})\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}} + (c_{12}a_{22} - c_{22}a_{12})\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} + c_{11}a_{22} - c_{22}a_{11} + c_{12}a_{21} - c_{21}a_{12} = 0\end{aligned}\right| \quad (20)$$

Das sind zwei identische Gleichungen, in denen nur die Unbekannte verschieden bezeichnet ist. Nennen wir letztere allgemein k, so erhält man für sie also eine, und zwar eine quadratische Gleichung

$$(c_{11}a_{21} - c_{21}a_{11})k^2 + (c_{11}a_{22} - c_{22}a_{11} + c_{12}a_{21} - c_{21}a_{12})k + c_{12}a_{22} - c_{22}a_{12} = 0, \quad (21)$$

wobei k für die Quotienten $\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}}$ und $\frac{\beta_{21}}{\beta_{22}}$ (bei Cohen $\frac{m_1}{m_3}$ und $\frac{m_2}{m_4}$) steht. Diese Quotienten ergeben sich hieraus beide in der Form

$$\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}} = p \pm \sqrt{q} \text{ und } \frac{\beta_{21}}{\beta_{22}} = p \pm \sqrt{q},$$

wo p und q sich in bekannter Weise aus den Koeffizienten der quadratischen Gleichung (21) zusammensetzen.

Die Bedingung (17), und damit die Elimination von ξ_1 bzw. ξ_2 aus (16), läßt sich also durch vier verschiedene Kombinationen der Werte von k erfüllen. Diese vier reduzieren

sich aber auf zwei, welche grundsätzlich verschieden sind; nämlich 1. zwei Transformationen, bei denen die Quotienten einander gleich sind (also beide gleich $p+\sqrt{q}$ oder beide gleich $p-\sqrt{q}$), und 2. zwei Transformationen, bei denen sie ungleich sind (der eine $p+\sqrt{q}$, der andere gleich $p-\sqrt{q}$). Diese letztere benutzt Herr Cohen. Die erstere führt offenbar auf den schon früher (§ 5) berührten Grenzfall, in dem $\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}=0$ ist. Sie liefert bei der von Cohen angewandten Integrationsmethode überhaupt kein bestimmtes Resultat; die Form der Integrale bleibt ganz unbestimmt, wie in meiner eingangs angeführten Arbeit gezeigt wird. Aber auch die Wahl zweier ungleichen Werte für die Quotienten $\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}}$ und $\frac{\beta_{21}}{\beta_{22}}$ führt nicht allgemein zum Ziele, wie ausführlicher in der genannten Arbeit dargelegt ist, sondern nur in einem besonderen Falle, der als eine Ausartung des Schwingungssystems anzusehen ist und sich praktisch nicht verwirklichen läßt.

Wählt man nämlich mit Herrn Cohen die Werte folgendermaßen (k_1 und k_2 sind zur Unterscheidung eingeführte Benennungen):

$$\begin{aligned}\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}}&=p+\sqrt{q}=k_1,\\ \frac{\beta_{21}}{\beta_{22}}&=p-\sqrt{q}=k_2,\end{aligned}\tag{22}$$

und setzt

$$\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}=k_3,$$

so nehmen zwar die Gleichungen (16) die einfachere Form an

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A}_{22}-\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{12})\frac{d^2\xi_1}{dt^2}+(\mathfrak{B}_{11}\mathfrak{A}_{22}-\mathfrak{B}_{21}\mathfrak{A}_{12})\frac{d\xi_1}{dt}+(\mathfrak{C}_{11}\mathfrak{A}_{22}-\mathfrak{C}_{21}\mathfrak{A}_{12})\xi_1+\\ +(\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{A}_{22}-\mathfrak{B}_{22}\mathfrak{A}_{12})\frac{d\xi_2}{dt}=0,\\ (\mathfrak{A}_{22}\mathfrak{A}_{11}-\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{21})\frac{d^2\xi_2}{dt^2}+(\mathfrak{B}_{22}\mathfrak{A}_{11}-\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{A}_{21})\frac{d\xi_2}{dt}+(\mathfrak{C}_{22}\mathfrak{A}_{11}-\mathfrak{C}_{12}\mathfrak{A}_{21})\xi_2+\\ +\mathfrak{B}_{21}\mathfrak{A}_{11}-\mathfrak{B}_{11}\mathfrak{A}_{21})\frac{d\xi_1}{dt}=0,\end{aligned}\right|\tag{23}$$

oder in Anlehnung an die von Cohen gebrauchten Bezeichnungen (um den Vergleich zu erleichtern):

$$\left.\begin{aligned}\beta_{12}\beta_{22}\left(T_1\frac{d^2\xi_1}{dt^2}+T_2\frac{d\xi_1}{dt}+T_3\xi_1+k_3T_4\frac{d\xi_2}{dt}\right)=0,\\ -\beta_{12}\beta_{22}\left(P_1\frac{d^2\xi_2}{dt^2}+P_2\frac{d\xi_2}{dt}+P_3\xi_2+\frac{1}{k_3}P_4\frac{d\xi_1}{dt}\right)=0.\end{aligned}\right|\tag{24}$$

Aber damit ist nichts Wesentliches gewonnen; denn der auch hier anzuwendende Integrationsansatz (13) führt wie beim Vorhandensein aller Glieder ebenfalls auf eine charakteristische Gleichung 4. Grades. Herr Cohen hat sie zwar durch ein besonderes Integrationsverfahren in zwei quadratische Gleichungen zu zerspalten versucht. Es läßt sich aber nachweisen[1]), daß diese Cohensche Zerspaltung nur in Spezialfällen richtige Lösungen gibt; bei dem dort behandelten elektromagnetischen Schwingungssystem zweier quasistationärer Stromkreise mit magnetischer Koppelung ist dieser Fall eine Ausartung des Systems, die in Wirklichkeit nicht vorkommen kann. Nur eine gewisse Annäherung an den Grenzfall ist möglich, aber für diese Annäherung gibt die Cohensche Lösung kein befriedigendes Resultat mehr.

7. Der Grenzfall, um den es sich handelt, ist, wie ich an der genannten Stelle gezeigt habe, durch die Bedingung gegeben, daß die Koeffizienten T_3 und P_3 von Gl. (24) durch die Relation verbunden sein müssen.

$$T_3+P_3=0\tag{25}$$

oder in unserer Beziehungsweise

$$\frac{\mathfrak{C}_{11}\mathfrak{A}_{22}-\mathfrak{C}_{21}\mathfrak{A}_{12}}{\beta_{12}\beta_{22}}-\frac{(\mathfrak{C}_{22}\mathfrak{A}_{11}-\mathfrak{C}_{12}\mathfrak{A}_{21})}{\beta_{12}\beta_{22}}=0.\tag{25a}$$

Nun ergibt sich durch Einsetzen der Werte (11)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{C}_{11}\mathfrak{A}_{22}-\mathfrak{C}_{21}\mathfrak{A}_{12}=(c_{11}a_{21}-c_{21}a_{11})\beta_{11}\beta_{21}+(c_{11}a_{22}-c_{21}a_{12})\beta_{11}\beta_{22}+\\ +(c_{12}a_{21}-c_{22}a_{11})\beta_{12}\beta_{21}+(c_{12}a_{22}-c_{22}a_{12})\beta_{12}\beta_{22},\\ \mathfrak{C}_{22}\mathfrak{A}_{11}-\mathfrak{C}_{12}\mathfrak{A}_{21}=-(c_{11}a_{21}-c_{21}a_{11})\beta_{11}\beta_{21}+(c_{22}a_{11}-c_{12}a_{21})\beta_{11}\beta_{22}+\\ +(c_{21}a_{12}-c_{11}a_{22})\beta_{12}\beta_{21}-(c_{12}a_{22}-c_{22}a_{12})\beta_{12}\beta_{22}.\end{aligned}\right|\tag{26}$$

1) A. Kalähne, loc. cit.

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY

Setzt man dies in (25a) ein, und führt außerdem die Werte k_1 und k_2 nach (22) ein, so ergibt sich durch Zusammenfassung der gleichen Größen die Bedingungsgleichung

$$\left.\begin{aligned} T_3 + P_3 = 2\,(c_{11}a_{21} - c_{21}a_{11})\,k_1k_2 + (c_{11}a_{22} - c_{22}a_{11} + c_{12}a_{21} - c_{21}a_{12})\,(k_1 + k_2) + \\ + 2\,(c_{12}a_{22} - c_{22}a_{12}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Rechnet man nun aus (21) die Werte k_1 und k_2 aus[1]) und setzt sie hier ein, so erhält man nach einfacher Umformung

$$T_3 + P_3 = -\frac{(c_{11}a_{22} - c_{22}a_{11} + c_{12}a_{21} - c_{21}a_{12})^2 + 4\,(c_{11}a_{21} - c_{21}a_{11})\,(c_{22}a_{12} - c_{12}a_{22})}{c_{11}a_{21} - c_{21}a_{11}} \quad (28)$$

oder übersichtlicher durch Einführung der Wienschen Koppelungskoeffizienten

$$T_3 + P_3 = -a_{11}a_{22}\frac{(n_1^2 - n_2^2 + n_1^2\vartheta_1\varrho_2 - n_2^2\vartheta_2\varrho_1)^2 + 4\,(n_1^2\varrho_2 - n_2^2\vartheta_2)\,(n_2^2\varrho_1 - n_1^2\vartheta_1)}{n_1^2\varrho_2 - n_2^2\vartheta_2} \quad (28a)$$

In dem wichtigen Falle, daß $a_{21} = a_{12}$ und $c_{21} = c_{12}$ ist, vereinfachen sich beide Ausdrücke noch, da $c_{12}a_{21} - c_{21}a_{12} = 0$ bezw. $n_1^2\vartheta_1\varrho_2 - n_2^2\vartheta_2\varrho_1 = 0$ wird. Insbesondere geht (28a) über in

$$T_3 + P_3 = -a_{11}a_{22}\frac{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\,n_1^2n_2^2\,(\varrho_1 - \vartheta_1)\,(\varrho_2 - \vartheta_2)}{n_1^2\varrho_2 - n_2^2\vartheta_2} \quad (29)$$

wie sich leicht berechnen läßt.

Damit der Ausdruck $T_3 + P_3$ verschwindet, müssen offenbar gewisse Beziehungen zwischen den Größen n, ϱ, ϑ bestehen. Dabei sind bestimmte Spezialfälle zu unterscheiden.

1. Die Faktoren, welche das als zweites Glied im Zähler rechts stehende Produkt bilden, haben verschiedene Vorzeichen, das Produkt ist also negativ. Dann liefert die Nullsetzung des Zählers eine ziemlich komplizierte und unübersichtliche Beziehung.

2. Die Faktoren haben gleiches Vorzeichen, das Produkt ist also positiv. Dann liefert die Nullsetzung des Zählers drei einfache, gleichzeitig zu erfüllende Bedingungen. Denn da alle Glieder des Zählers positiv werden, so müssen sie in diesem Falle einzeln Null werden, und das geschieht, wenn gleichzeitig

$$\left.\begin{aligned} n_1^2 - n_2^2 + n_1^2\vartheta_1\varrho_2 - n_2^2\vartheta_2\varrho_1 = 0 \\ n_2^2\varrho_1 - n_1^2\vartheta_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

ist; $n_1^2\varrho_2 - n_2^2\vartheta_2$ muß bei diesem Verfahren von Null verschieden bleiben, sonst nimmt der Ausdruck die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an.

In den wesentlich — oder vielleicht allein — in Betracht kommenden Fällen haben die Faktoren tatsächlich gleiches Vorzeichen, z. B. immer, wenn nur eine Art der Koppelung vorhanden ist, wenn also entweder $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ oder $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ ist. So ist bei dem magnetisch gekoppelten System der beiden Stromkreise $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$. Die Koppelungskoeffizienten ϱ_1 und ϱ_2 (oder im anderen Falle ϑ_1 und ϑ_2) haben gleiches Vorzeichen, weil sich sonst ein Widerspruch mit dem Energieprinzip ergeben würde. Bei den gekoppelten Stromkreisen z. B. würden verschiedene Vorzeichen bedeuten, daß in dem einen Kreise die von dem andern induzierte elektromotorische Kraft eine Richtung hat, die dem Lenzschen Gesetz widerspricht. Die Vorzeichengleichheit der Koppelungskoeffizienten hängt hier mit der besonderen Form zusammen, in welcher sich die magnetische Energie U des Systems durch die beiden Stromstärken ausdrücken läßt. Es ist bekanntlich dieselbe Form, in der bei mechanischen Systemen die kinetische Energie durch die verallgemeinerten Lagrangeschen Koordinaten ausgedrückt wird, worauf ja auch die Analogie zwischen elektromagnetischen Stromsystemen und zyklischen mechanischen Systemen beruht (vgl. § 12).

8. Die Folgerung, die sich aus der Bedingung $T_3 + P_3 = 0$ für die Cohensche Lösung bei solchen Systemen ergibt, ist einfach diese: die Lösung gilt nur für den Fall der Resonanz der ungedämpften freien Systeme ($n_1 = n_2$), wenn gleichzeitig der Koppelungskoeffizient ϱ_1 verschwindet, so daß nur ϱ_2 bleibt (ϑ_1 und ϑ_2 sind von vornherein gleich Null). Das bedeutet, daß nur das primäre System auf das sekundäre einwirken soll, nicht auch umgekehrt dieses auf jenes; also ein Grenzfall, der nicht streng, sondern mit einer gewissen Annäherung zu erfüllen ist.

Man kann jedoch noch weiter schließen, daß nicht bloß einer, sondern beide Koeffizienten ϱ verschwinden müssen. Die Cohensche Rechnung führt die beiden Größen $k_1 = \frac{\beta_{11}}{\beta_{12}}$ und $k_2 = \frac{\beta_{21}}{\beta_{22}}$ ein, die durch die quadratische Gleichung (21) bestimmt werden. Offenbar kann man aus Symmetriegründen mit dem-

1) Die „Ausrechnung" ist unnötig, denn die beiden Verbindungen $k_1 k_2$ und $k_1 + k_2$, die allein gebraucht werden, ergeben sich ohne weiteres aus den Koeffizienten der quadratischen Gleichung.

selben Recht die reziproken Werte $\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}$ und $\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}}$ einführen. Das kommt darauf hinaus, daß man überall die Indizes 1 und 2 vertauscht. An der Rechnung und allen ihren Schlüssen ändert sich aber nichts. Die Bedingung $T_3 + P_3 = 0$ wird wieder durch (27) bezw. (28) und (29) dagestellt, wenn man darin nur die Indizes 1 und 2 miteinander vertauscht. Das gibt die Bedingung für die Gültigkeit der Cohenschen Lösung: $n_1 = n_2$, $\varrho_2 = 0$, während ϱ_1 zunächst von Null verschieden anzunehmen ist. Die Frequenzen und Dämpfungskonstanten der gekoppelten Schwingungen ergeben sich aber auf beiden Wegen gleich, als Lösungen zweier quadratischer Gleichungen; in ihnen kommen ϱ_1 und ϱ_2 symmetrisch vor, keiner von beiden Koeffizienten ist irgendwie bevorzugt. Da jedoch der eine Weg, der dazu führt, $\varrho_1 = 0$ verlangt, der andere aber $\varrho_2 = 0$, so müssen offenbar beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein, d. h. die Koppelung muß überhaupt ganz wegfallen; die Cohensche Lösung gilt also nur für den Grenzfall völlig verschwindender Koppelung. Dann geht sie tatsächlich in die exakte Lösung für die Eigenschwingungen zweier unabhängiger Schwingungssysteme über, die man natürlich einfach durch Auflösung zweier quadratischer Gleichungen erhält. Das Ergebnis der umfangreichen Rechnungen des Herrn Cohen ist daher leider nur ein scheinbares und kann nicht befriedigen. Das gleiche gilt von dem Fall zweier Systeme in direkter Schaltung, bei dem Herr Cohen die Gleichungen durch analoge Substitution auf dieselbe Form bringt und dann dieselbe Lösung anwendet. Auf die Einzelheiten der Arbeit brauchen wir hier nicht einzugehen.

Die Koppelungsgleichungen als Spezialfall der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen mechanischer Systeme.

9. Im vorhergehenden ist der Mißerfolg spezieller Versuche zur Vereinfachung der Integration gekoppelter Schwingungsgleichungen besprochen worden. Es soll nun die Frage etwas allgemeiner behandelt werden durch Zuhilfenahme der sogenannten Haupt- oder Normalkoordinaten.

Die Gleichungen (1) sind ein besonderer Fall der Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems mit mehreren Freiheitsgraden, wenn man ihre Allgemeinheit durch die Bedingung etwas einschränkt, daß

$$\left.\begin{array}{l} a_{21} = a_{12},\ b_{21} = b_{12},\ c_{21} = c_{12} \\ \text{oder allgemein} \\ a_{kk} = a_{kk},\ b_{kk} = b_{kk},\ c_{kk} = c_{kk} \end{array}\right| \quad (31)$$

sein soll, eine Bedingung, die im vorhergehenden nicht benutzt worden ist, die aber tatsächlich bei allen in Betracht kommenden Systemen, insbesondere auch den elektromagnetischen Schwingungssystemen mit quasistationärer Strömung erfüllt ist.

Eine andere wichtige Einschränkung ist von vornherein gemacht worden, nämlich die Annahme, daß die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, b_{11} ... sämtlich konstant sind. Das gilt für mechanische Systeme durchaus nicht allgemein, und hängt zum Teil von der Wahl der Koordinaten ab.

Unter diesen beiden Voraussetzungen sind Gl. (1) die in verallgemeinerten Lagrangeschen Koordinaten ausgedrückten Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems von zwei Freiheitsgraden, dessen bewegende Kräfte linear von den Koordinaten abhängen und ein Potential V besitzen, und in dem energiezerstreuende dissipative Kräfte proportional den Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ vorhanden sind, die sich mittels der von Lord Rayleigh[1]) eingeführten Zerstreuungsfunktion F ausdrücken lassen. Äußere, eingeprägte Kräfte, die nicht von Lage und Geschwindigkeit der Systemteile abhängen, sind nicht vorhanden, da die rechten Seiten Null sind. Kinetische Energie U und Zerstreuungsfunktion F lassen sich in diesem Falle als homogene quadratische Funktionen der Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ mit konstanten Koeffizienten, die potentielle Energie V als ebensolche Funktion der Koordinaten x darstellen.

Die Bewegungsgleichungen hängen mit den genannten drei Größen (und den äußeren oder eingeprägten Kräften) durch die von Lagrange angegebenen Beziehungen zusammen und lassen sich so aus ihnen ableiten. Es gilt

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = P_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = P_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right| \quad (32)$$

im ganzen so viel Gleichungen, als Freiheitsgrade vorhanden sind, in unserem Beispiel also zwei; dabei sind

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \ldots \text{die allgemeinen Lagrangeschen Koordinaten,} \\ \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1,\ \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 \ldots \text{die verallgemeinerten Geschwindigkeiten,} \\ P_1, P_2 \ldots \text{die verallgemeinerten äußeren Kräfte,} \end{array}\right| \quad (33)$$

die in unserem Fall gleich Null werden.

[1]) Lord Rayleigh, Theory of Sound I, § 81.

Die Gleichungen (32) gelten auch, wenn F und V nicht quadratische Funktionen der $\dot{x}$ bezw. x sind; doch erhalten dann natürlich die Bewegungsgleichungen nicht die Gestalt der Gl. (1).

U ist immer eine homogene quadratische Funktion der $\dot{x}$, doch sind die Koeffizienten derselben im allgemeinen nicht konstant, sondern Funktionen der Koordinaten x. In unserem besonderen Falle aber haben wir nach den gemachten Voraussetzungen

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{a_{11}}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{a_{22}}{2}\dot{x}_2^2 + \cdots + a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + a_{13}\dot{x}_1\dot{x}_3 + \cdots + a_{23}\dot{x}_2\dot{x}_3 + \cdots \\ F &= \frac{b_{11}}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{b_{22}}{2}\dot{x}_2^2 + \cdots + b_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + b_{13}\dot{x}_1\dot{x}_3 + \cdots + b_{23}\dot{x}_2\dot{x}_3 + \cdots \\ V &= \frac{c_{11}}{2}x_1^2 + \frac{c_{22}}{2}x_2^2 + \cdots + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{23}x_2x_3 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

mit konstanten Koeffizienten. Einsetzen der Werte (34) in (32) ergibt sofort die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\frac{d^2x_1}{dt^2} + a_{12}\frac{d^2x_2}{dt_2} + \cdots + b_{11}\frac{dx_1}{dt} + b_{12}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots &= P_1 \\ a_{21}\frac{d^2x_1}{dt^2} + a_{22}\frac{d^2x_2}{dt^2} + \cdots + b_{21}\frac{dx_1}{dt} + b_{22}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots &= P_2 \\ \text{— — — — — — — — — — — — — —} & \\ a_{m1}\frac{d^2x_1}{dt^2} + a_{m2}\frac{d^2x_2}{dt^2} + \cdots + b_{m1}\frac{dx_1}{dt} + b_{m2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots &= P_m, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

die in Gl. (1) übergehen, wenn man sich auf zwei Koordinaten beschränkt und die äußeren Kräfte gleich Null setzt. In diesen Gleichungen gelten aber die Bedingungen

$$a_{hk} = a_{kh},\quad b_{hk} = b_{kh},\quad c_{hk} = c_{kh} \tag{31}$$

und die obige Schreibweise, bei der scheinbar $a_{12} \neq a_{21}$ ist usw., ist nur aus Symmetriegründen gewählt.

10. Man kann nun die Gl. (34) und damit auch die Bewegungsgleichungen (35) wesentlich vereinfachen durch Einführung neuer Koordinaten, eben der Haupt- oder Normalkoordinaten. Das sind diejenigen Koordinaten, in welchen sich U, F, V (bzw. wenigstens zwei von ihnen) nur durch Quadrate, d. h. ohne die Glieder mit Produkten je zweier Koordinaten, ausdrücken lassen. Bei obiger Form der Gl. (34) sind die Normalkoordinaten bestimmte lineare Funktionen der ursprünglichen Koordinaten x. Es ist wohl möglich, daß bei anderer Form, d. h. wenn die Koeffizienten a, b, c nicht konstant sind, andre nicht linear mit den x verbundene Koordinaten die erstrebte Vereinfachung herbeiführen, also als Normalkoordinaten wirken können. Das kommt hier aber nicht in Betracht. Wir setzen bei m Freiheitsgraden,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11}\xi_1 + \beta_{21}\xi_2 + \beta_{31}\xi_3 + \cdots \\ x_2 &= \beta_{12}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 + \beta_{32}\xi_3 + \cdots \\ &\text{— — — — — — —} \\ x_m &= \beta_{1m}\xi_1 + \beta_{2m}\xi_2 + \beta_{3m}\xi_3 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

das heißt allgemein $x_h = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ih}\xi_i$.

Also wird

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 &= \beta_{11}^2\xi_1^2 + \beta_{21}^2\xi_2^2 + \cdots + 2\beta_{11}\beta_{21}\xi_1\xi_2 + 2\beta_{11}\beta_{31}\xi_1\xi_3 + \cdots \\ &\text{— — — — — — — — — — — —} \\ x_1x_2 &= \beta_{11}\beta_{12}\xi_1^2 + \beta_{21}\beta_{22}\xi_2^2 + \cdots + (\beta_{11}\beta_{22} + \beta_{21}\beta_{12})\xi_1\xi_2 + (\beta_{11}\beta_{32} + \beta_{31}\beta_{12})\xi_1\xi_3 \\ &\quad \cdots + (\beta_{21}\beta_{32} + \beta_{31}\beta_{22})\xi_2\xi_3 + \cdots \\ &\text{— — — — — — — — — — — — — —} \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Das heißt allgemein

$$x_h x_k = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} \beta_{rh}\beta_{sk}\xi_r\xi_s. \tag{37a}$$

In der Summenformel sind sämtliche Variationen rs mit Wiederholungen zu nehmen. Glieder wie z. B. $\beta_{11}\beta_{21}\xi_1\xi_2$ und $\beta_{21}\beta_{11}\xi_2\xi_1$ haben natürlich gleichen Wert und können beim ausführlichen Hinschreiben der Formeln zusammengefaßt werden. Die Formel gilt auch für $h = k$.

Durch Einsetzen von (36) bez. (37) in (34) ergibt sich genau dieselbe Form der Gleichungen für U, F, V wie vorher, aber ausgedrückt in den neuen Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{A_{11}}{2}\dot{\xi}_1^2 + \frac{A_{22}}{2}\dot{\xi}_2^2 + \cdots + A_{12}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 + A_{13}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_3 + \cdots + A_{23}\dot{\xi}_2\dot{\xi}_3 + \cdots \\ F &= \frac{B_{11}}{2}\dot{\xi}_1^2 + \frac{B_{22}}{2}\dot{\xi}_2^2 + \cdots + B_{12}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 + B_{13}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_3 + \cdots + B_{23}\dot{\xi}_2\dot{\xi}_3 + \cdots \\ V &= \frac{\Gamma_{11}}{2}\xi_1^2 + \frac{\Gamma_{22}}{2}\xi_2^2 + \cdots + \Gamma_{12}\xi_1\xi_2 + \Gamma_{13}\xi_1\xi_3 + \cdots + \Gamma_{23}\xi_2\xi_3 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Hierbei sind die neuen Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= a_{11}\beta_{11}^2 + a_{12}\beta_{11}\beta_{12} + a_{13}\beta_{11}\beta_{13} + \cdots + a_{22}\beta_{12}^2 + a_{23}\beta_{12}\beta_{13} + \cdots \\ A_{12} &= a_{11}\beta_{11}\beta_{21} + a_{12}\beta_{11}\beta_{22} + a_{13}\beta_{11}\beta_{23} + \cdots + a_{21}\beta_{12}\beta_{21} + a_{22}\beta_{12}\beta_{22} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

usw.

Allgemein

$$\left.\begin{aligned} A_{hk} &= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} a_{rs}\beta_{hr}\beta_{ks} \\ B_{hk} &= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} b_{rs}\beta_{hr}\beta_{ks} \\ \Gamma_{hk} &= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} c_{rs}\beta_{hr}\beta_{ks} \end{aligned}\right\} \quad (39a)$$

wobei h und k alle Werte von 1 bis m annehmen, jedoch so, daß $h \leq k$ ist. Für $h < k$ sind alle Variationen rs mit Wiederholungen, für $h = k$ sind nur alle Kombinationen rs mit Wiederholungen zu benutzen, wobei $r \leqq s$ zu halten ist, wie man aus (39) ersieht.

Bei einem System mit zwei Freiheitsgraden ($m = 2$) wird z. B.

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{a_{11}}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{a_{22}}{2}\dot{x}_2^2 + a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 = \frac{A_{11}}{2}\dot{\xi}_1^2 + \frac{A_{22}}{2}\dot{\xi}_2^2 + A_{12}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 \\ F &= \frac{b_{11}}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{b_{22}}{2}\dot{x}_2^2 + b_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 = \frac{B_{11}}{2}\dot{\xi}_1^2 + \frac{B_{22}}{2}\dot{\xi}_2^2 + B_{12}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 \\ V &= \frac{c_{11}}{2}x_1^2 + \frac{c_{22}}{2}x_2^2 + c_{12}x_1x_2 = \frac{\Gamma_{11}}{2}\xi_1^2 + \frac{\Gamma_{22}}{2}\xi_2^2 + \Gamma_{12}\xi_1\xi_2 \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= a_{11}\beta_{11}^2 + a_{12}\beta_{11}\beta_{12} + a_{22}\beta_{12}^2 \\ A_{22} &= a_{11}\beta_{21}^2 + a_{12}\beta_{21}\beta_{22} + a_{22}\beta_{22}^2 \\ A_{12} &= a_{11}\beta_{11}\beta_{21} + a_{12}\beta_{11}\beta_{22} + a_{21}\beta_{12}\beta_{21} + a_{22}\beta_{12}\beta_{22} \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

ist, und entsprechende Gleichungen für die B und Γ gelten[1]).

Einführung der Haupt- oder Normalkoordinaten.

11. Von den Koeffizienten A_{hk}, B_{hk}, Γ_{hk} läßt sich nun mittels geeigneter Werte der Substitutionskoeffizienten β, d. h. durch geeignete Wahl der Koordinaten ξ eine gewisse Anzahl zum Verschwinden bringen. Macht man auf diese Weise die Koeffizienten mit verschiedenen Indizes, bei denen also $h \gtrless k$ ist, zu Null, so sind die so bestimmten Koordinaten ξ die Haupt- oder Normalkoordinaten. Es läßt sich aber sofort zeigen, daß das Verschwinden der Produkte $\xi_1\xi_2$ usw. auf diesem Wege im allgemeinen gleichzeitig nur bei zwei der Größen U, F, V zu erreichen ist[1]); bei der dritten bleiben die Produkte, weil die entsprechenden Koeffizienten im allgemeinen nicht auch gleich Null werden. Nur in besonderen Fällen, wenn von vornherein zwischen den Koeffizienten a, b, c von (34) gewisse Beziehungen bestehen, können gleichzeitig in U, F, V alle Produkte verschwinden.

Man erhält aus den Bedingungen

$$A_{hk} = 0,\ B_{hk} = 0,\ \Gamma_{hk} = 0, \text{ wenn } h \neq k \quad (42)$$

oder

$$A_{12} = A_{13} = \cdots = A_{23} = \cdots = 0,\ B_{12} = B_{13} = \cdots = 0,\ \Gamma_{12} = \Gamma_{13} = \cdots = 0$$

bei m Freiheitsgraden $\frac{3m(m-1)}{1 \cdot 2}$ Gleichungen, nämlich für die A_{hk} so viel, als Kombinationen von m Elementen zu je zwei (hk) ohne Wiederholungen möglich sind, d. h. $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$, und ebensoviel für die B_{hk} und die Γ_{hk}. Zur Befriedigung derselben sind die m^2 Koeffizienten β der Substitutionsgleichungen (36) vorhanden. Von diesen sind aber nur $m^2 - 1$ fest bestimm-

1) Die Substitutionsgleichungen (36) lassen sich, wie schon S. 1199, Fußnote 1 bemerkt wurde, noch etwas verallgemeinern durch Hinzufügung konstanter Glieder, die eine Verschiebung des Koordinatenursprungs bedeuten und die sich in der Form $\beta_{01}\xi_0$ (zu x_1 gehörend), $\beta_{02}\xi_0$ (zu x_2 gehörend) usw. schreiben lassen, wo ξ_0 ebenso wie β_{01}, β_{02} ... konstant ist; also $x_1 = \beta_{01}\xi_0 + \beta_{11}\xi_1 + \beta_{21}\xi_2 + \cdots$ usw. Die Erweiterung gibt aber nichts wesentlich anderes. Denn in den Ausdrücken für U und F fallen die konstanten Glieder wegen der Differentiation überhaupt weg, und in V bewirken sie nur das Auftreten von Gliedern, die linear von x_1, x_2 ... abhängen, neben den quadratischen. In die Bewegungsgleichungen (32) kommen daher durch Differentiation des V nach den x noch konstante Kräfte hinein, die als äußere Kräfte aufgefaßt werden können und eine über die Schwingungen sich überlagernde gleichförmige Bewegung bewirken. Die betreffenden Koeffizienten Γ_{00}, Γ_{01}, Γ_{02} ..., die in (38) bei V hinzukommen, ergeben sich nach der gleichen Formel (39) wie Γ_{11} usw.

1) Vgl. auch Lord Rayleigh, Theory of Sound I § 96.

bar: einer, z. B. β_{11}, bleibt willkürlich, indem er einfach von dem willkürlich wählbaren Maßstab der beiden Koordinatensysteme x und ξ abhängt.

Weiter aber sind die hier vorliegenden Bestimmungsgleichungen homogen in bezug auf die unbekannten Größen β, indem jedes Glied ein Produkt je zweier von ihnen enthält, wie man aus (39) erkennt. Da die rechten Seiten Null sind, so kann man alle Gleichungen durch passend gewählte Produkte von je zwei der Koeffizienten β_{11}, β_{22}, β_{33} ... dividieren und reduziert dadurch die Zahl der durch die Gleichungen bestimmbaren Unbekannten auf $m(m-1)$. Die Absolutwerte von β_{11}, β_{22}, β_{33} ... sind dabei gleichgültig. Die Zahl der Gleichungen ist also um $\frac{m(m-1)}{2}$ größer als die Zahl der zu bestimmenden Unbekannten. Daher können im allgemeinen nur $m(m-1)$ von den Gleichungen (42) befriedigt werden, $\frac{m(m-1)}{2}$ von den Koeffizienten A_{hh}, B_{hk}, Γ_{hk} verschwinden dagegen nicht. Letztere Zahl ist aber gerade die Anzahl der Koeffizienten A_{hk} oder B_{hk} oder Γ_{hk}, bei denen $h \neq k$ ist.

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= a_{11}\beta_{11}^2 + a_{12}\beta_{11}\beta_{12} + a_{22}\beta_{12}^2, \\ B_{11} &= b_{11}\beta_{11}^2 + b_{12}\beta_{11}\beta_{12} + b_{22}\beta_{12}^2, \\ \Gamma_{11} &= c_{11}\beta_{11}^2 + c_{12}\beta_{11}\beta_{12} + c_{22}\beta_{12}^2, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= a_{11}\beta_{11}\beta_{21} + a_{12}\beta_{11}\beta_{22} + a_{21}\beta_{12}\beta_{21} + a_{22}\beta_{12}\beta_{22}, \\ B_{12} &= b_{11}\beta_{11}\beta_{21} + b_{12}\beta_{11}\beta_{22} + b_{21}\beta_{12}\beta_{21} + b_{22}\beta_{12}\beta_{22}, \\ \Gamma_{12} &= c_{11}\beta_{11}\beta_{21} + c_{12}\beta_{11}\beta_{22} + c_{21}\beta_{12}\beta_{21} + c_{22}\beta_{12}\beta_{22}, \end{aligned}\right\}$$

Die Anzahl der Koeffizienten A_{hk}, B_{hk}, Γ_{hk} mit $h \neq k$ ist hier $\frac{3m(m-1)}{1 \cdot 2} = 3$ in Übereinstimmung mit (44).

Setzt man die Werte (44) gleich Null, so erhält man drei in der Form identische, nur durch die Buchstaben a, b, c unterschiedene Gleichungen. Dividiert man sie durch $\beta_{11}\beta_{22}$ und setzt

$$\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} = u_2, \quad \frac{\beta_{21}}{\beta_{22}} = u_1, \tag{45}$$

führt man ferner für $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ usw. die Wienschen Koeffizienten ϱ, σ, ϑ nach (2) in § 2 ein, so werden die Gleichungen, wenn man sie noch durch a_{12}, bzw. b_{12}, bzw. c_{12} dividiert und die Gleichheit von a_{12} und a_{21} usw. berücksichtigt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_1}{\varrho_1} + u_1 u_2 + \frac{u_2}{\varrho_2} &= -1 \\ \frac{u_1}{\sigma_1} + u_1 u_2 + \frac{u_2}{\sigma_2} &= -1 \\ \left(\frac{u_1}{\vartheta_1} + u_1 u_2 + \frac{u_2}{\vartheta_2} = -1\right) & \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Die Gleichungen (48) gelten übrigens stets alle zugleich, wenn eine gilt; denn sie sind nur verschiedene Formen derselben Gleichung.

Im allgemeinen Falle, wenn also von den Gleichungen (47) nur eine bzw. von (48) keine erfüllt ist, lassen sich nur zwei von den Gl. (46) durch ein Wertepaar u_1, u_2 befriedigen, die dritte gilt dann nicht, was durch die Einklammerung an-

Beispiel des Systems von zwei Freiheitsgraden. Es ist $m = 2$; also wird

$$x_1 = \beta_{11}\xi_1 + \beta_{21}\xi_2, \quad x_2 = \beta_{12}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2$$

$$\left.\begin{aligned} A_{22} &= a_{11}\beta_{21}^2 + a_{12}\beta_{21}\beta_{22} + a_{22}\beta_{22}^2 \\ B_{22} &= b_{11}\beta_{21}^2 + b_{12}\beta_{21}\beta_{22} + b_{22}\beta_{22}^2 \\ \Gamma_{22} &= c_{11}\beta_{21}^2 + c_{12}\beta_{21}\beta_{22} + c_{22}\beta_{22}^2 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned} &(a_{21} = a_{12}) \\ &(b_{21} = b_{12}) \\ &(c_{21} = c_{12}) \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

durch je zwei von ihnen sind u_1 und u_2 bestimmt. Damit durch diese Werte auch die dritte befriedigt wird, muß zwischen den Koppelungskoeffizienten ϱ, σ, ϑ eine Beziehung bestehen, die man folgendermaßen erhält. Durch Subtraktion folgt aus (46)

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\sigma_1}\right)u_1 + \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\sigma_2}\right)u_2 &= 0 \\ \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\vartheta_1}\right)u_1 + \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\vartheta_2}\right)u_2 &= 0 \\ \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\varrho_1}\right)u_1 + \left(\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\varrho_2}\right)u_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Wenn zwei von diesen Gleichungen (47) erfüllt sind, so ist es auch die dritte, wie man leicht übersieht. Je zwei dieser homogenen linearen Gleichungen für u sind erfüllt, wenn die Determinante ihrer Koeffizienten gleich Null ist. Das liefert also die Bedingung dafür, daß durch die angenommene lineare Substitution gleichzeitig alle drei Koeffizienten A_{12}, B_{12}, Γ_{12} zum Verschwinden gebracht werden, nämlich: es muß eine von den drei folgenden Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\vartheta_2}\right) - \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\sigma_2}\right)\left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\vartheta_1}\right) &= 0 \\ \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\vartheta_1}\right)\left(\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\varrho_2}\right) - \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\vartheta_2}\right)\left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\varrho_1}\right) &= 0 \\ \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\sigma_2}\right) - \left(\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\sigma_1}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

gedeutet ist. Um beispielsweise die Produkte in U und F zum Verschwinden zu bringen, hat man u_1 und u_2 aus den beiden ersten Gleichungen (46) zu berechnen. Das liefert, wie hier noch angegeben werden möge,

$$\left.\begin{aligned} u_1 = \frac{\beta_{21}}{\beta_{22}} &= -\frac{1}{2\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\sigma_1}\right)}\left[\left(\frac{1}{\varrho_1\sigma_2}-\frac{1}{\varrho_2\sigma_1}\right) \pm \sqrt{4\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{1}{\varrho_1\sigma_2}-\frac{1}{\varrho_2\sigma_1}\right)^2}\right] \\ u_2 = \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} &= +\frac{1}{2\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\sigma_2}\right)}\left[\left(\frac{1}{\varrho_1\sigma_2}-\frac{1}{\varrho_2\sigma_1}\right) \pm \sqrt{4\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{1}{\varrho_1\sigma_2}-\frac{1}{\varrho_2\sigma_1}\right)^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Es gelten nur immer die oberen oder die unteren Wurzelvorzeichen gleichzeitig in beiden Ausdrücken, so daß die eckigen Klammern in beiden denselben Wert haben. Die entsprechenden Werte u, welche F und V bezw. V und U verschwinden machen, folgen hieraus durch zyklische Vertauschung der ϱ, σ, ϑ.

12. Wegfall der Produkte in den Größen U, F, V hat zur Folge, daß in den Bewegungsgleichungen, die aus (32) hervorgehen, die entsprechenden Glieder wegfallen. Das sind aber gerade die als Koppelungsglieder bezeichneten (vgl. § 2). Man hat es also in der Hand, bei Schwingungssystemen mit Differentialgleichungen von der Form (35), bei denen die Bedingungen (31) gelten, durch geeignete Wahl der neuen (Normal-) Koordinaten zwei Koppelungsarten zu beseitigen, so daß nur eine Art derselben übrig bleibt, etwa die Beschleunigungskoppelung. Enthalten die vorgelegten Differentialgleichungen von vornherein nur eine Koppelungsart (z. B. im Fall zweier elektromagnetischer Schwingungskreise mit magnetischer Koppelung wie in Gl. (3) des § 2), so bedeutet dies, daß die angewandten Koordinaten bereits Normalkoordinaten im obigen Sinne sind. Elektrische Spannungen und Stromstärken sind daher solche Normalkoordinaten. Das ergibt sich auch, wenn man U, F, V in diesen Größen ausdrückt. Z. B. wird für ein System von zwei Kondensatorkreisen mit magnetischer Koppelung

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{L_1}{2}J_1^2 + L_{12}J_1J_2 + \frac{L_2}{2}J_2^2 = \frac{L_1C_1^2}{2}\left(\frac{dV_1}{dt}\right)^2 + L_{12}C_1C_2\,\frac{dV_1}{dt}\,\frac{dV_2}{dt} + \frac{L_2C_2^2}{2}\left(\frac{dV_2}{dt}\right)^2 \\ F &= \frac{R_1}{2}J_1^2 + \frac{R_2}{2}J_2^2 = \frac{R_1C_1^2}{2}\left(\frac{dV_1}{dt}\right)^2 + \frac{R_2C_2^2}{2}\left(\frac{dV_2}{dt}\right)^2 \\ V &= \frac{2}{2C_1}\left[\int J_1\,dt\right]^2 + \frac{1}{2C_2}\left[\int J_2\,dt\right]^2 = \frac{C_1}{2}V_1^2 + \frac{C_2}{2}V_2^2 \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

wo L, R, C die im § 2 angegebene Bedeutung haben und die Beziehungen $J_1 = -C_1\frac{dV_1}{dt}$, $J_2 = -C_2\frac{dV_2}{dt}$ benutzt sind. U ist hier die magnetische, V die elektrische Energie, $2F$ die pro Zeiteinheit entwickelte Joulesche Wärme; J_1 und J_2, V_1 und V_2 sind die Stromstärken bezw. Spannungen in den Kreisen. Da nur U ein Produkt der Koordinaten bezw. ihrer Differentialquotienten enthält, so erhält man mittels der Lagrangeschen Gleichungen (32) bloß magnetische Koppelung in den Gl. (3). Eine weitere Vereinfachung solcher Gleichungen mit nur einer Koppelungsart durch Einführung neuer Koordinaten ist nun nicht mehr möglich. Im Gegenteil treten dabei wieder andre Koppelungen neu auf. Eine Art der Koppelung bleibt jedenfalls immer.

Anders ist es bei ungedämpften oder — in der Mechanik — konservativen Systemen, bei denen die dissipativen Kräfte und mit ihnen die Zerstreuungsfunktion F wegfallen. Die beiden übrig bleibenden Größen U und V lassen sich dann immer mittels der Normalkoordinaten als quadratische Funktionen ohne Produkte ausdrücken. Dabei fällt die Koppelung ganz weg und man erhält eine dem Freiheitsgrad des Systems entsprechende Anzahl von freien ungedämpften Schwingungen, den Partialschwingungen des Systems. Solche freien Partialschwingungen, deren charakteristische Gleichung vom 2. Grade ist, kommen wie gesagt bei gedämpften Systemen nur in Spezialfällen vor. Während also die Normalkoordinaten bei der mathematischen Behandlung ungedämpfter Systeme eine sehr große Rolle spielen, ist diese bei gedämpften nur gering. Keinesfalls kann man mit ihrer Hilfe die Rechnung wesentlich vereinfachen. Die Integration führt im allgemeinen Falle immer auf die Lösung einer höheren algebraischen, bei zwei Freiheitsgraden einer biquadratischen Gleichung, die sich nur in gewissen Grenzfällen, Fällen der Ausartung des schwingenden Systems, in quadratische zerspalten läßt.

Verallgemeinerung der Gleichungen und des Resultats.

13. Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man nicht von den Energiegleichungen (34) mittels der Lagrangeschen Gleichungen (32) zu den Differentialgleichungen der Bewegung (35) übergeht, sondern diese für sich allein betrachtet. Man braucht dann auch nicht die, in der Natur freilich, wie es scheint, immer geltenden einschränkenden Bedingungen (31) anzunehmen, sondern kann den allgemeineren Fall

$$a_{kk} \neq a_{kk},\ b_{kk} \neq b_{kk},\ c_{kk} \neq c_{kk} \qquad (51)$$

behandeln.

Man hat dabei an die für m Freiheitsgrade verallgemeinerten Gleichungen (1), nämlich die Gl. (38) anzuknüpfen. Diese gehen durch die Substitution (36) in die den Gl. (10) entsprechenden über, die sich von den Gl. (35) nur dadurch unterscheiden, daß überall x durch ξ und die Buchstaben a, b, c durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ersetzt sind. Die neuen Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind durch (12) bestimmt.

Die Substitutionskoeffizienten β kann man nun so wählen, daß einige von den Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ verschwinden, insbesondere Koeffizienten von Koppelungsgliedern. Die besondere Form der Koeffizienten, wie sie aus (12) zu ersehen ist, insbesondere wenn man sie wie in (11) ausführlich hinschreibt, verhindert jedoch, daß man die Koeffizienten, welche Null werden sollen, ganz willkürlich auswählen darf.

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ergibt folgendes. Es sind im ganzen m^2 Koeffizienten $\mathfrak{A}$, ebenso viele $\mathfrak{B}$ und ebenso viele $\mathfrak{C}$ vorhanden, insgesamt also $3m^2$ Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Diese lassen sich in Gruppen einteilen; einerseits in die drei Buchstabengruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, andrerseits in Gruppen mit gemeinschaftlichem ersten oder zweiten Index. Letztere Einteilung ist für uns wichtig. Jede Gruppe mit gemeinschaftlichem zweiten Index enthält nämlich eine und nur eine Gruppe von m Koeffizienten β. Z. B. enthält die Gruppe $\mathfrak{A}_{11}$, $\mathfrak{A}_{21}$, $\mathfrak{A}_{31} \ldots \mathfrak{A}_{m1}$, $\mathfrak{B}_{11}$, $\mathfrak{B}_{21}$, $\mathfrak{B}_{31} \ldots \mathfrak{B}_{m1}$, $\mathfrak{C}_{11}$, $\mathfrak{C}_{21}$, $\mathfrak{C}_{31} \ldots \mathfrak{C}_{m1}$ die β-Gruppe β_{11}, β_{12}, $\beta_{13} \ldots \beta_{1m}$, und diese kommt allein hier vor, wird also auch allein durch die genannten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bestimmt. Von den $3m$, der genannten Gruppe angehörenden Werten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, dürfen nun offenbar im allgemeinen nur m, nämlich soviel wie zugehörige β-Koeffizienten vorhanden sind, willkürlich vorgeschrieben werden. Dadurch sind dann die zugehörigen m Koeffizienten β bestimmt und mit ihnen die Werte der übrigen $2m$ Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dieser Gruppe. Sind die vorgeschriebenen Werte sämtlich Null, so dürfen sogar nur $m - 1$ Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ der Gruppe willkürlich diesem Werte gleichgemacht werden. Denn die Bestimmungsgleichungen für die β werden dann homogene lineare Gleichungen, und bekanntlich können m homogene lineare Gleichungen nur dann nebeneinander bestehen, wenn die Determinante ihrer Koeffizienten verschwindet. Das ist aber hier die aus den zugehörigen a, b, c gebildete Determinante; ihr Verschwinden stellt eine Beziehung zwischen gewissen Koeffizienten unsrer Differentialgleichungen (35) dar, die in diesem Falle erfüllt sein muß, also eine Beschränkung auf einen besonderen Fall des schwingenden Systems.

Im allgemeinen können aus jeder Koeffizientengruppe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mit gleichem zweiten Index also nur $m - 1$ zum Verschwinden gebracht werden, bei insgesamt m solchen Gruppen also $m(m - 1)$. Soviel Koppelungskoeffizienten kann man hier also im günstigsten Falle von den vorhandenen $3m(m - 1)$ Koppelungskoeffizienten wegschaffen, d. h. bei zwei Freiheitsgraden ($m = 2$) von 6 vorhandenen nur 2, bei drei Freiheitsgraden von 18 vorhandenen nur 6, also jeweils den dritten Teil. Diese Anzahl erhöht sich wie in § 12 auf das Doppelte, wenn man die Bedingungen (31) gelten läßt, also den in vorher behandelten spezielleren Fall betrachtet, welchem die Lagrangeschen Gleichungen (32) mit den Energiegleichungen (34) gelten. Ohne diese einschränkende Bedingung ist es hier noch weniger möglich, die Differentialgleichungen der gekoppelten Schwingungen durch eine lineare Transformation der abhängigen Variablen zu vereinfachen.

Zusammenfassung.

14. Es wird gezeigt, daß eine lineare Substitution der abhängigen Variablen, oder — mit anderen Worten — Einführung der sogenannten Haupt- oder Normalkoordinaten die Differentialgleichungen gekoppelter Schwingungssysteme mit Dämpfung nicht so vereinfacht, daß die Berechnung der bei der Integration auftretenden Konstanten wesentlich bequemer wird. Im Gegensatz zu ungedämpften Systemen lassen sich die Koppelungsglieder auf diese Weise nicht alle fortschaffen; daher läßt sich die charakteristische Gleichung, aus der Frequenz und Dämpfung hervorgehen[1]), nicht wie dort in mehrere Gleichungen geringeren Grades zerspalten, sondern bleibt z. B. bei einem System von zwei Freiheitsgraden biquadratisch.

1) Brauchbare Formeln zur Berechnung von Dämpfung und Frequenz gekoppelter Systeme mit zwei Freiheitsgraden aus der biquadratischen charakteristischen Gleichung haben M. Wien, P. Drude und insbesondere neuerdings (für zwei Kreise mit induktiver bezw. Beschleunigungskoppelung) B. Macků (Jahrb. d. drahtl. Telegr. **3**, 329, 1910) angegeben.

Eine von Herrn Cohen gefundene, auf solcher Zerspaltung beruhende Lösung gilt nur in extremen Fällen der Ausartung des Schwingungssystems.

Oliva bei Danzig, November 1910.

(Eingegangen 12. November 1910.)

Über molekulare Schwingungen fester Körper[1].

Von A. Stein.

Man kann die Wärme eines Körpers auffassen als die kinetische Energie seiner Moleküle, die Wärme der einatomigen Körper, also der Metalle, als die Bewegungsenergie der Atome. Während diese bei festen Körpern um eine stabile Gleichgewichtslage pendeln, schießen sie bei Gasen durcheinander. Man nimmt nun, wohl infolge des analogen Verhaltens gelöster und gasförmiger Stoffe, meist an, daß die Molekularbewegung der Flüssigkeit der des Gases gleiche. Dagegen läßt sich geltend machen, daß der flüssige Zustand im allgemeinen dem festen viel ähnlicher ist als dem gasförmigen[2]). Farbe, Dichte, Ausdehnungskoeffizient ändern sich beim Schmelzen nur wenig, während zwischen flüssigem und gasförmigem Zustand eine scharfe Grenze besteht. Von besonderer Bedeutung dürfte sein, daß die spezifische Wärme, die im festen und flüssigen Zustande nur wenig verschieden ist, im gasförmigen auf die Hälfte herabgeht. Auf Grund dieser Tatsachen spricht G. Mie in einer Abhandlung über einatomige Körper folgende Meinung aus: „In einem festen Körper besteht die ganze Wärmebewegung einfach darin, daß die Atome um die Gleichgewichtslage Pendelschwingungen ausführen, indem jedes abwechselnd seine Bewegungsenergie in potentielle Energie umsetzt und umgekehrt. Ich nehme an, daß in einem flüssigen Körper der Vorgang im wesentlichen derselbe ist, nur daß hier die Atome weit genug gelagert sind, daß sie bei stärkeren Ausschlägen gelegentlich einmal zwischeneinander hindurchschlüpfen können." Vorausgesetzt wird dabei, daß die Atome sich unabhängig voneinander bewegen.

Nach dieser Auffassung dürfte das Schmelzen eines Körpers dann beginnen, wenn die Amplituden der schwingenden Atome die Hälfte der Atomabstände erreichen und überschreiten. Das Atom schwingt dann nicht mehr durch seine alte Gleichgewichtslage zurück, sondern durch eine benachbarte. Die Atome müßten dann pendelnd durcheinander gleiten, was den flüssigen Zustand sowohl von dem festen als auch von dem gasförmigen unterscheiden würde.

Nun ist die Energie eines pendelnden Atoms abhängig von seiner Masse (m), seiner Amplitude (a) und seiner Schwingungszahl (n) und zwar ist die mittlere kinetische Energie proportional:

$$m\,n^2\,a^2.$$

Ist aber die mittlere lebendige Kraft des Atoms das Maß der Temperatur, so ist sie bei Temperaturgleichheit zweier Stoffe gleichzusetzen:

$$m_1 n_1^2 a_1^2 = m_2 n_2^2 a_2^2.$$

Man kennt von diesen Größen $\frac{m_1}{m_2}$, nämlich das Verhältnis der Atomgewichte.

Auf Grund der oben entwickelten Vorstellung vom Schmelzen nehme ich nun an, daß die Schwingungsamplituden fester einatomiger Stoffe bei gleicher Temperatur sich verhalten wie die Atomabstände, die Gleichheit der Schmelzpunkte vorausgesetzt.

Das Verhältnis der Atomabstände zweier einatomiger Stoffe aber ist bekannt. Es ist das Verhältnis der Kubikwurzeln aus den Atomvolumina. Hier ist unter dem Atomvolumen nicht der Raum zu verstehen, den ein Grammatom stofflich ausfüllt, sondern der Raum, der durch die Schwingungen der Atome eines Grammatoms behauptet wird. Da in den Grammatomen verschiedener Stoffe gleichviel Atome vorhanden sind, so ergeben sich im Verhältnis die Räume, die die einzelnen schwingenden Atome der verschiedenen Stoffe behaupten, also Körpervolumen dividiert durch Atomzahl.

Die Vorstellung läßt sich auf mehratomige Körper, also auch auf Verbindungen übertragen, wenn man die Begriffe des Molekularabstandes und des Molekularvolumens einführt.

Darf man aber das Verhältnis der Amplituden durch das Verhältnis der Kubikwurzeln aus den Molekularvolumina, also durch das Verhältnis der Molekularabstände ersetzen, so ergibt sich die interessante Möglichkeit, das

1) Das Ergebnis dieser Arbeit ist in der Hauptsache bereits in der Abhandlung „Über die Berechnung molekularer Eigenfrequenzen" von Herrn F. A. Lindemann enthalten, diese Zeitschr. 11, 609, 1910. Davon wurde ich erst durch Herrn Professor Krüger in Kenntnis gesetzt, als ich der Physikalischen Zeitschrift diese Ausführung anbot. Während Herr Lindemann unter Zuhilfenahme der Einsteinschen und Clausius-Mossottischen Theorie die Schwingungszahlen selbst berechnet, kommt diese Arbeit, die in allem wesentlichen bereits im Juni 1910 fertig vorlag, zur Bestimmung der Schwingungszahlenverhältnisse.

2) G. Mie, Annalen d. Physik 11, 657, 1903.

Verhältnis der molekularen Schwingungszahlen zweier Stoffe zu berechnen. Es folgt:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{m_2}\sqrt[3]{v_2}}{\sqrt{m_1}\sqrt[3]{v_1}}\,^{1}),$$

wo v das Molekularvolumen.

Die molekularen Schwingungszahlen von Stoffen mit gleichen Schmelzpunkten verhalten sich umgekehrt wie die Produkte aus der Quadratwurzel des Molekulargewichts und der Kubikwurzel des Molekularvolumens.

Das Gesetz kann geprüft werden an dem optischen Verhalten der festen Körper im Ultraroten, besonders an den hier vorliegenden Untersuchungen von H. Rubens. Nach der mechanischen Lichttheorie erfolgt die Absorption und Reflexion von Lichtstrahlen durch Stoffe dadurch, daß die Lichtschwingungen die Resonanz der Moleküle gleicher Schwingungszahl erregen. Die elektromagnetische Lichttheorie nimmt an, daß nicht das ganze Molekül, sondern nur ein frei beweglicher Teil, das Elektron, durch elektrische Resonanz die Erscheinung bewirkt. Nun hat aber Drude aus der verschiedenen Größenordnung des Quotienten aus elektrischer Ladung und Masse im Ultravioletten und Ultraroten den Schluß gezogen, „daß die ultravioletten Eigenschwingungen den freien negativen Elektronen zugehören, daß dagegen die ultraroten Eigenschwingungen hervorgebracht werden durch Schwingung des ganzen positiv geladenen Moleküls oder eines Teiles desselben“[2]). Nach beiden Theorien müßten demnach die Schwingungszahlen der Absorptionsbanden der einzelnen Stoffe die aus Molekulargewicht und Molekularvolumen berechneten Schwingungszahlen direkt bestätigen.

Rubens und Hollnagel haben neuerdings die Reststrahlen von Kochsalz, Sylvin, Bromkalium und Jodkalium untersucht. In der Zusammenstellung der Ergebnisse heißt es[3]):

„Es ergab sich, daß die Reststrahlen von $NaCl$, KCl, KBr aus je zwei Streifen von verschiedener Stärke bestehen. Dies ist auch für die Reststrahlen des KJ möglicherweise der Fall.

Die Wellenlänge der einzelnen Streifen ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Diejenige des stärkeren Streifens ist mit λ_1, diejenige der schwächeren mit λ_2, die mittlere Wellenlänge der betreffenden Reststrahlenart mit λ_0 bezeichnet.

Außerdem enthält die Tabelle die Molekulargewichte M der untersuchten vier Substanzen.

Reststrahlen von	λ_1	λ_2	λ_0	M
Steinsalz	53,6 μ	46,9 μ	51,7 μ	58,5
Sylvin	62	70,3	63,4	74,6
Bromkalium . . .	86,5	75,6	82,3	119
Jodkalium			96,7	166

Man sieht, daß die mittleren Wellenlängen mit den Molekulargewichten wachsen und zwar langsamer als die Molekulargewichte, aber schneller als deren Quadratwurzeln.“

An den mittleren Wellenlängen der Reststrahlen, die auch Rubens in Beziehung zu den Molekulargewichten setzt, kann das Gesetz deswegen geprüft werden, weil die Schmelzpunkte der Verbindungen nahe bei einander liegen (700—800°). Auszuschalten ist allerdings zunächst der Wert bei Jodkalium. Hier gestaltete sich die Untersuchung am schwierigsten, da die Wirkung der Strahlen bei den größeren Wellenlängen sehr schwach wird. Es wurde nur ein Streifen gefunden, ein zweiter aber als möglicherweise vorhanden bezeichnet. Daher ist der Wert beim Jodkalium kein Mittelwert im Sinne der übrigen.

Im folgenden sind die beobachteten Werte mit den berechneten zusammengestellt. Der Berechnung wurden folgende Werte zu Grunde gelegt.

	Mol.-Gewicht	Mol.-Volumen	Produkt $\sqrt{m}\sqrt[3]{v}$
Steinsalz . .	58,5	27	22,9
Sylvin . . .	74,6	37	28,8
Bromkalium .	119	44	38,5
Jodkalium .	166	54	48,7

Beobachtet (Verhältnis der Schwingungzahlen):

$KCl : NaCl = 51{,}7 : 63{,}4 = 0{,}82$

$KBr : KCl = 63{,}4 : 82{,}3 = 0{,}77.$

Berechnet:

$KCl : NaCl = 22{,}9 : 28{,}8 = 0{,}80$

$KBr : KCl = 28{,}8 : 38{,}5 = 0{,}75.$

Die Schwingungszahl des Streifens vom Jodkalium darf nicht zu einem Mittelwerte, sondern höchstens zu einem Streifen in Beziehung gesetzt werden. Sie paßt gut zu $\lambda_2 = 75{,}6\ \mu$ bei Bromkalium:

1) Diese Gleichung folgt aus der Lindemannschen Gleichung

$$\nu = \text{const.}\sqrt{\frac{T\varepsilon}{M\sqrt[3]{a^2}}},$$

wenn man die Schmelzpunkte gleichsetzt und das Verhältnis zweier Schwingungszahlen bildet. Anderseits folgt aus obiger Ableitung die Abhängigkeit vom Schmelzpunkte, wenn man beim Schmelzen, wo ja die Amplitude proportional dem Atomabstande wird, die mittlere kinetische Energie des pendelnden Atoms $\pi^2 m n^2 a^2$ (a die Amplitude) der absoluten Temperatur proportional setzt.

2) Drude, Lehrbuch d. Optik, S. 378.

3) Sitzungsberichte d. Berliner Akad. 1910, S. 26.

Beobachtet:

$$KJ : KBr = 75{,}6 : 96{,}7 = 0{,}78.$$

Berechnet:

$$KJ : KBr = 38{,}5 : 48{,}7 = 0{,}79.$$

Es ist dann auch einleuchtend, daß der zweite Streifen vom Jodkalium nicht gefunden wurde. Er müßte etwa bei 110 μ liegen, also bei einer dem Experiment sehr schwer zugänglichen Wellenlänge.

Die Abweichungen der beobachteten und berechneten Werte sind leicht erklärlich. Die Schmelzpunkte sind nicht völlig gleich. Der Sylvin war nicht vollkommen rein, sondern bestand aus 98,5 Proz. KCl und 1,5 Proz. $NaCl$. Dann wird die Wellenlänge der Reststrahlen noch von verschiedenen Ursachen beeinflußt. Rubens sagt: „Die mittlere Wellenlänge der Reststrahlen hängt, wie schon hervorgehoben worden ist, nicht nur von dem Material der Platten ab, an welchen die Reflexion hervorgebracht wird, sondern auch von der Zahl der Reflexionen und von dem Inzidenzwinkel, ferner von der Energieverteilung der verwendeten Lichtquelle, von dem Absorptionsvermögen des Strahlungsmessers und von der selektiven Absorption aller Medien, welche sich im Strahlengange befinden. Alle diese Einflüsse aber sind gering gegenüber der selektiven Reflexion des Plattenmaterials, zumal wenn die Zahl der Reflexionen nicht zu klein gewählt wird."

Das Gesetz kann ferner angewendet werden auf die Reststrahlen von Quarz und Flußspat, deren Schmelzpunkte bei etwa 1400° liegen. Beim Quarz befindet sich ein Streifen bei 20,75 μ, beim Flußspat bei 24,4 μ, nach einer neueren Beobachtung bei 25,5 μ[1]).

	Mol.-Gewicht	Mol.-Volumen	Produkt $\sqrt{m}\sqrt[3]{v}$
Quarz . . .	60,4	22,8	22,0
Flußspat . .	78,1	24,5	25,6

Beobachtet:

$$CaFl_2 : SiO_2 = 20{,}75 : 24{,}4 = 0{,}85.$$

Berechnet:

$$CaFl_2 : SiO_2 = 22{,}0 : 25{,}6 = 0{,}86.$$

Der neuere Wert für Flußspat zeigt allerdings eine größere, aber noch nicht unbefriedigende Abweichung vom berechneten Werte.

Nun finden sich beim Quarz aber außerdem zwei scharfe Streifen bei 8,5 und 9,02 μ. Ein ursprünglich bei 8,85 μ angegebener vierter Streifen wird in neueren Angaben nicht mehr erwähnt, hat sich also nicht bestätigt. Merkwürdigerweise sind die Schwingungszahlen dieser beiden Streifen genau umgekehrt proportional den Quadratwurzeln aus den Massen der beiden Komponenten des Quarzmoleküls, Si und O_2.

Beobachtet:

$$9{,}02 : 8{,}5 = 1{,}061.$$

Berechnet:

$$Si : O_2 = \sqrt{32} : \sqrt{28{,}4} = 1{,}061.$$

Hierbei ist allerdings die Zuteilung der Komponenten zu den beiden Streifen willkürlich. Es liegt nahe, anzunehmen, daß die beiden Streifen durch Teilschwingungen von Si und O_2 verursacht werden, während der Streifen bei 20,75 μ durch die Schwingung des ganzen Moleküls zustande kommt. Wären die Komponenten des Moleküls voneinander unabhängig frei beweglich, so dürfte man nach Boltzmann ihre Bewegungsenergien bei einer gegebenen Temperatur gleichsetzen[1]). Nun ist allerdings nicht anzunehmen, daß sie sich unabhängig voneinander bewegen, weil sie auch als Ganzes schwingen. Wohl aber ist der Grad ihrer Beweglichkeit, eben weil sie aneinander gebunden sind, bei beiden gleich, so daß vielleicht auch hier die Gleichsetzung der Bewegungsenergien erfolgen darf. Da nun hier die Entfernung der gleichartigen Teile des Moleküls, d. h. die Entfernungen der Si-Atome von einander und der O_2-Gruppen von einander offenbar gleich sind, da sie ja in gleicher Anzahl denselben Raum erfüllen, so ergibt sich bei Anwendung des Gesetzes tatsächlich der einfache Fall, daß ihre Schwingungszahlen umgekehrt proportional sein müssen den Quadratwurzeln aus ihren Massen. Die völlige Übereinstimmung zwischen berechnetem und beobachtetem Werte im Gegensatz zu den andern Werten würde sich dann daraus erklären, daß hier der Fehler wegfällt, der in der Gleichsetzung bei wenn auch nur geringer Verschiedenheit des Schmelzpunktes und vielleicht auch in der Bestimmung des Molekularvolumens liegt.

So findet sich das Gesetz in befriedigender Weise bei allen bekannten Reststrahlen bestätigt. Nur die Reststrahlen des Kalkspates bei 6,65 μ entziehen sich seiner Anwendung, da der Schmelzpunkt fehlt[2]).

Merkwürdige Gesetzmäßigkeiten ergeben sich bei Anwendung des Gesetzes auf Metallgruppen mit annähernd gleichen Schmelzpunkten. Es sind dies: Kupfer, Silber, Gold mit Schmelzpunkten bei 1000°; Eisen, Nickel, Kobalt mit

1) Rubens u. Nichols, Wied. Ann. **60**, 418, 1897.

1) L. Boltzmann, Gastheorie **2**. S. 100.

2) Die Berücksichtigung der Höhe verschiedener Schmelztemperaturen, wie des Quarzes und der Haloide, liefert allerdings keine Übereinstimmung. Vielleicht ist dies im komplizierteren Bau des Quarzmoleküls begründet.

Schmelzpunkten bei 1500°; die beiden Gruppen der Platinmetalle Ruthenium, Rhodium, Palladium und Osmium, Iridium, Platin mit Schmelzpunkten bei 1800° (Osmium und Iridium höher) und schließlich Chrom, Molybdän, Wolfram, Uran, sämtlich mit sehr hohen Schmelzpunkten.

Die benutzten Werte sind:

	Atom-Gewichte	Atom-Volumen	Produkt $\sqrt{m}\sqrt[3]{v}$
Cu	63,6	7,1	15,3
Ag	107,9	10,3	22,7
Au	197,2	10,2	30,5
Fe, Co, Ni	55,9; 59; 58,7	6,6; 6,7; 6,7	14,0; 14,5; 14,4
Ru, Rh, Pd	101,7; 103; 106,5	9,2; 9,5; 9,3	21,1; 21,5; 21,7
Os, Ir, Pt	191; 193; 194,8	8,9; 8,6; 9,1	28,6; 28,5; 29,1
Cr	52,1	8	14,4
Mo	96	11,1	21,8
W	184	9,6	28,8
U	238,5	13	36,3

Es ergeben sich folgende Schwingungszahlenverhältnisse:

$$Au : Cu = 1{,}00 : 2$$
$$Ag : Cu = 2{,}02 : 3$$

Nahezu 1 wird das Schwingungszahlenverhältnis bei Eisen, Kobalt und Nickel, bei Ruthenium, Rhodium und Palladium, bei Osmium, Iridium und Platin, was ja bei der geringen Verschiedenheit der Atomgewichte und Atomvolumina der Elemente in den einzelnen Gruppen von vornherein selbstverständlich ist. Bildet man aber die Verhältnisse zwischen den drei Gruppen, so erhält man wieder:

Platingruppe: Eisengruppe = 1,00 : 2
Rutheniumgruppe: Eisengruppe = 2,01 : 3.

Ebenso folgt in der Chromgruppe:

$$W : Cr = 1{,}00 : 2$$
$$Mo : Cr = 1{,}98 : 3$$
$$U : Cr = 1{,}98 : 5.$$

Es fällt auf, daß die Schwingungszahlenverhältnisse verwandter Elemente mit annähernd gleichen Schmelzpunkten sich durch die kleinsten ganzen Zahlen ausdrücken lassen. Die Abweichungen betragen kaum ein Prozent.

Eine ähnliche Bestätigung der berechneten Werte wie durch die Reststrahlen ist aus den optischen Eigenschaften der Metalle kaum zu erwarten. Bei den Leitern der Elektrizität muß ein Fluktuieren der Elektronen angenommen werden, wodurch das optische Verhalten unabhängig von den Eigenschwingungen wird. Das Reflexionsvermögen der Metalle nähert sich im Ultraroten asymptotisch 100 Prozent[1]). Im Sichtbaren und Ultravioletten zeigen sich allerdings charakteristische Schwankungen; doch ist, weil die Eigenschwingungen der Atome nach dem Ultravioletten zu nur allmählich und unvollkommen zur Geltung kommen, eine zahlenmäßige Bestätigung der berechneten Werte nicht zu erwarten.

Immerhin ist es nicht unmöglich, daß sich hier ein Weg zu einer vollkommeneren Systematik der Stoffe zeigt, als sie in dem periodischen System vorhanden ist, vollkommener deshalb, weil nicht nur die Atomgewichte, sondern auch die spezifische Raumerfüllung und die Schmelzpunkte der Stoffe berücksichtigt werden.

(Eingegangen 19. November 1910.)

1) E. Hagen und H. Rubens, Ann. d. Phys., 11, 873, 1903.

Messungen der Abnahme des Mondlichtes während der Mondfinsternis vom 16.—17. November d. J.

Von J. Elster und H. Geitel.

Die folgende Mitteilung bietet insofern vielleicht ein gewisses Interesse, als unseres Wissens die Lichtabnahme des Mondes während seines Eintritts in den Erdschatten noch nicht quantitativ verfolgt ist.

Solche Lichtmessungen lassen sich leicht mit Hilfe einer photoelektrischen Kaliumzelle ausführen, deren Kaliumelektrode vorher durch Einleiten des Glimmstromes in verdünntem Wasserstoff mit der besonders lichtempfindlichen blauvioletten Modifikation jenes Alkalimetalls überzogen ist[1]).

Es ist für den vorliegenden Zweck vorteilhaft, den Gasdruck innerhalb der Zellen nicht zu niedrig zu wählen. Der bei Belichtung der Kaliumfläche gemessene photoelektrische Strom wird nämlich bei höchster Verdünnung des Gasinhalts der Zelle allein durch diejenigen negativen Elektronen unterhalten, die in zur Lichtintensität proportionaler Menge von dem Kalium ausgestrahlt werden. Bei schwachem Lichte, wie dem des Mondes, ist daher der Sättigungsstrom schon bei einem an die Kaliumelektrode angelegten beschleunigenden Potentiale von — 50 bis — 100 Volt erreicht, die Empfindlichkeit der Zelle kann durch Erhöhung dieser Spannung nicht weiter gesteigert werden. Anders dagegen, wenn man einen merklichen Gasdruck in der Zelle beläßt. Die Kurve, die den Photostrom als Funktion der beschleunigenden Spannung bei konstanter Lichtstärke darstellt, steigt mit zunehmender Voltzahl — infolge der Neubildung von Ionen durch Stoß — an, bis bei

1) Diese Zeitschr. 11, 257, 1910.

einem kritischen Werte der letzteren die leuchtende Entladung in dem verdünnten Gase einsetzt. Durch passende Wahl des Gasdrucks wie der Spannung, die man beide am einfachsten vor dem Abschmelzen der Zelle von der Pumpe an einer schwachen Lichtquelle ausprobiert, lassen sich hohe Empfindlichkeiten gegenüber kleinen Lichtreizen leicht erreichen.

Wir benutzten eben diese Eigenschaft der Kaliumzellen, um während der letzten Mondfinsternis in der Nacht vom 16. zum 17. November die Abnahme des Mondlichtes zu messen.

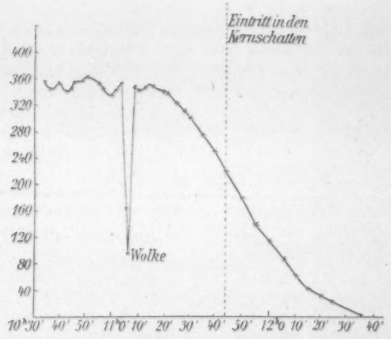
Eine konvexe Sammellinse aus Glas von 25 cm Durchmesser war an einem horizontal und vertikal drehbaren Eisengestelle so befestigt, daß sie in beliebiger Lage fest eingestellt werden konnte, etwas jenseits ihres Brennpunktes befand sich in zur Linse unveränderlicher Lage die Kaliumzelle. Zur Sicherung der Einstellung diente eine kleinere, der ersteren parallele Linse. Traf das von dieser entworfene Bild des Mondes einen als Marke dienenden weißen Fleck auf einer geschwärzten Kartonscheibe, so füllte das von der ersteren gebildete unscharfe Bild die Kaliumfläche bis auf einen schmalen Saum aus.

An der Zelle lag eine Spannung von —232 Volt, als Meßinstrument diente ein Drehspulgalvanometer (1 Skt. gleich 10^{-9} Amp.). Das Gestell mit Linse und Zelle stand im Freien, von dort führten Drähte, die von Isolatoren mit Natriumtrocknung getragen wurden, in den Akkumulatorenraum und zum Galvanometer. Der eine von uns übernahm die Einstellung der Zelle gegen den Mond, der andere die Ablesung des Galvanometers. Vor und nach den Messungen wurde die Empfindlichkeit der Zelle an einem Auerbrenner gemessen und praktisch gleich befunden.

Am 16. November war der Nachmittag regnerisch und der Himmel bis 10^h bedeckt, dann begannen die Wolken sich zu lichten, so daß der Mond anfangs in größeren Lücken, später meist ganz frei erschien. Um 10^h 30 konnten wir mit den Beobachtungen beginnen. Leichte Nebelschleier verursachten zunächst noch Schwankungen in der Lichtstärke, von 11^h 5-6 verdeckte eine helle Wolke den Mond, von 11^h 8 bis 12^h 30 blieb der Himmel in der Nähe des Mondes während der Ablesungszeiten wolkenfrei. Nach 12^h 30 trat leider wieder zunehmende Bedeckung ein; um die Apparate gegen Regen zu schützen, brachen wir 12^h 40 die Messungen ab, als die Finsternis nahezu total war. Hätten wir voraussehen können, daß später der Himmel wieder zeitweilig frei werden würde, so wäre uns wahrscheinlich auch die Messung der Helligkeitszunahme nach der Verfinsterung geglückt.

Tabelle.

Beobachtungszeit	Stromstärke (1 Skalenteil = 10^{-9} Amp.)	
10^h 34′	353	× 10^{-9} Ampere
36	343	
39	351	
42	340	
44	344	
45	353	
49	358	
50	363	
55	353	
56	349	
11^h 0′	333	Schleier
1	342	
2	353	
3	358	Helle Wolken in d. Nähe d. Mondes
5	163	Wolken vor dem Monde
6	93	
8	352	
10	342	
12	348	
15	350	
19	342	
21	340	
24	323	Geringe Lichtabnahme am Ostrande
27	309	des Mondes
30	302	
35	277	
40	250	
44	220	Eintritt in den Kernschatten
50	179	
55	138	
12^h 0′	113	
5	85	
10	61	
15	42	
20	32	
25	21	Mond noch wolkenfrei
35	0	Wolken



In der vorstehenden Tabelle sind die Messungsresultate wiedergegeben, die Figur zeigt die Lichtkurve, in der die Abszissen die Zeit in Minuten (mitteleuropäische Zeit, kontrolliert an den Uhren der hiesigen Post und Bahnstation), die Ordinaten die Lichtstärken in Skalenteilen des Galvanometers darstellen.

Man erkennt an der Kurve die anfänglichen Schwankungen des Lichts infolge vorüberziehender Nebelschleier und Wolken. Da die Höhe des Mondes während der Beobachtungsdauer sich nicht wesentlich änderte, bleibt, von jenen Schwankungen abgesehen, die Helligkeit bis gegen $11^h\,15$ konstant, dann macht sich der Einfluß des Halbschattens der Erde bemerklich und bewirkt einen steilen Abfall der Kurve. $11^h\,24$ war auch dem Auge eine geringe Abnahme der Helligkeit am Ostrande des Mondes erkennbar, $11^h\,44$ zeigte sich übereinstimmend mit der astronomischen Vorausberechnung der Eintritt des Kernschattens. Nach dem Nautical Almanach hat der erste Kontakt des Mondes mit dem Halbschatten der Erde $10^h\,46$ stattgefunden.

Bei noch günstigeren Verhältnissen würde der genaue Moment der ersten Lichtabnahme, der vielleicht für den Nachweis einer Lichtabsorption in den höchsten Schichten der Erdatmosphäre von Bedeutung wäre, mit größerer Schärfe festzustellen gewesen sein. Da aber eine im ganzen gleich günstige Gelegenheit, bei der die Verfinsterung des Mondes mit seiner Kulmination nahe zusammenfällt, nicht so bald wiederkehren wird, glaubten wir die erhaltenen Resultate doch mitteilen zu dürfen.

Wahrscheinlich wird es gelingen, durch Vergrößerung der Zelle die Sammellinse zur Konzentration der Mondstrahlen entbehrlich zu machen. Vor der Hand waren wir noch darauf angewiesen, da die Zelle allein im direkten Vollmondlichte nicht mehr als 14 Skalenteile am Galvanometer gegeben haben würde. Bemerkt sei noch, daß eine Amylazetatnormalkerze in 1 m Abstand 6,5 Skt. ergab. Der Vergleich sagt indessen über das physiologische Helligkeitsverhältnis der beiden Lichtquellen nichts aus, da das Mondlicht mehr photoelektrisch wirksame (blaue) Strahlen enthält als das Licht der Amylazetatflamme.

Die zu den Messungen benutzte Sammellinse nebst Stativ ist, wie wir dankend erwähnen, aus Mitteln der Jagorstiftung in Berlin beschafft.

(Eingegangen 24. November 1910.)

Über die Messung der Vertikalkomponente des Windes mittels des Vertikalanemometers.

Von P. P. Ewald.

Das Vertikalanemometer, wie es z. B. von Angot auf dem Eiffelturm zum Registrieren der Vertikalkomponente der Windgeschwindigkeit benutzt wurde, besteht aus einem leichten vierflügeligen Schaufelrädchen mit vertikaler Achse, dessen Flügel eben und unter 45^0 gegen die Vertikale geneigt sind. Bei jeder ganzen oder halben Umdrehung wird ein elektrischer Kontakt geschlossen und so auf einem beliebig weit entfernten Registrierstreifen der Zeitpunkt der vollendeten Umdrehung notiert. Eine Abänderung, die das Instrument tragbar macht, aber an der Wirkungsweise nichts wesentlich ändert, ist von P. Ludewig kürzlich in der Physikalischen Zeitschrift[1]) beschrieben worden. Hier ist die Achse des Flügelrades quer fein durchbohrt, so daß das Licht einer kleinen Glühlampe bei jeder Umdrehung zweimal auf einen lichtempfindlichen Papierstreifen durchblitzen kann, der mit bekannter Geschwindigkeit vorbeigezogen wird. Die Entfernung der aufgezeichneten Punkte ist umgekehrt proportional der Umdrehungsgeschwindigkeit der Flügel; zur Erkennung der Drehrichtung sind drei unter 60^0 versetzte Durchbohrungen der Achse in verschiedener Höhe vorgesehen.

Aus der registrierten Drehgeschwindigkeit des Instrumentes glaubte man sofort die Vertikalkomponente der Windgeschwindigkeit erhalten zu können. Hierzu verleitet folgende oberflächliche Überlegung: Denke ich mir das Instrument mit vertikaler Achse in einem rein horizontalen Luftstrom aufgestellt, so wird es sich offenbar nicht drehen, da der Druck der Luft auf zwei diametrale Flügel gleich groß ist. Wegen der Verschiebung des Druckmittelpunktes (und der Änderung des zugehörigen Drehmomentes) mit dem Einfallswinkel der Luft gibt es eine gewisse zum Wind symmetrische Gleichgewichtslage, welche vom Instrument aufgesucht wird, ohne daß eine fortdauernde Drehung zustande kommt.

Befindet sich andrerseits der Apparat in einem rein vertikalen Winde, so tritt so lange eine Beschleunigung der Flügel ein, als ihre Geschwindigkeit[2]) kleiner als die Vertikalgeschwindigkeit v des Windes ist, andernfalls werden die Flügel gebremst. Beim Fehlen der Horizontalkomponente dreht sich das Anemometer tatsächlich — abgesehen wird von dem geringen Geschwindigkeitsverlust durch Reibung — mit der Geschwindigkeit v des Luftstromes.

Es ist falsch, von diesen beiden Grenzfällen aus zu schließen, das Instrument registriere stets die wahre Vertikalkomponente; denn auf ein rotierendes Anemometer ist die Horizon-

1) 11, 543, 1910.

2) Die Dimensionen der Flügelplatte sind entweder als klein gegen den Flügelarm zu denken, oder es ist die lineare Geschwindigkeit eines erfahrungsgemäß zu bestimmenden mittleren Punktes der Flügelplatte gemeint.

talkomponente nicht mehr ohne Einfluß, da auf der einen Seite die Relativgeschwindigkeit zwischen Flügel und Luft durch die Rotation vergrößert, auf der andern verkleinert wird, und der von der Horizontalkomponente allein herrührende Druck auf ein rotierendes Flächenpaar nicht mehr gleich groß ist.

Um zu sehen, bis zu welchem Grade das Anemometer die Vertikalgeschwindigkeit falsch anzeigt, berechnen wir den Druck auf einen Doppelflügel bei beliebiger Gesehwindigkeit V_1 der Flächen und für eine Stellung, die durch den $\sphericalangle \alpha$ des Flügelarmes gegen die Horizontalkomponente h des Windes charakterisiert ist, mitteln den gefundenen Druck für alle α einer halben Umdrehung, und verlangen, daß das Anemometer mit einer solchen Geschwindigkeit $V_1 = V_0$ laufe, daß dieser gemittelte Druck Null ist, d. h. daß es im großen ganzen keine Beschleunigung oder Verzögerung erfährt. Diese Geschwindigkeit V_0, die von der Größe der Horizontalkomponente h und der Vertikalkomponente v des Windes abhängt, entspricht dem stationären Zustand. Für den Druck haben wir mangels besserer Formeln den Ansatz

$$p = c^2 \sin(\text{Einfallswinkel}) = c \cdot c_n$$

zu machen, wenn c die Relativgeschwindigkeit zwischen Flügel und Luft, c_n ihre Normalkomponente zur Flügelfläche bedeutet.

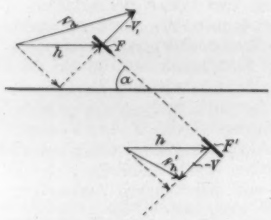


Fig. 1.

Nennen wir die Horizontalkomponente der Relativgeschwindigkeit c_h, so haben wir für die Flügel F und F':

$$c^2 = c_h^2 + v^2 = h^2 + V_1^2 + v^2 + 2hV_1 \sin\alpha,$$
$$c'^2 = h^2 + V_1^2 + v^2 - 2hV_1 \sin\alpha,$$
$$c_n = \cos 45^0 \cdot (\text{Komponente von } c_h \text{ in Richtung von } V_1 - v),$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(h\sin\alpha + V_1 - v),$$

wobei $-v$ steht, weil die Geschwindigkeit entgegen der in den Wind gerichteten Normalen positiv gesetzt wurde. Für den diametralen Flügel ist

$$c'_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(h\sin\alpha - (V_1 - v)).$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung mit A^2 die Summe $h^2 + V_1^2 + v^2$, so ist also der Druck

$$p = \sqrt{A^2 + 2hV_1\sin\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(h\sin\alpha + V_1 - v)$$

bezw.

$$p' = \sqrt{A^2 - 2hV_1\sin\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(h\sin\alpha - (V_1 - v)).$$

Wir haben jetzt durch Integration nach α von o bis π den Gesamtdruck für den ganzen Umlauf zu bilden; hierzu machen wir die Voraussetzung, daß $2hV_1\sin\alpha$ klein sei gegen A^2, so daß wir die Wurzel durch ihre Entwickelung

$$A + \frac{hV_1\sin\alpha}{A}$$

ersetzen können. Da A von α nicht abhängt, finden wir nach Subtraktion $p - p'$ den mittleren Druck entgegen der durch die Vertikalkomponente erzeugten Bewegung V_1

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (p - p')\,d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2A(V_1 - v) + \int_0^\pi \frac{2h^2V_1\sin^2\alpha}{A}\,d\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2A(V_1 - v) + \frac{h^2V_1}{A}\right).$$

Wir betrachten diesen Ausdruck für zwei Fälle:

1. Es sei v und V_1 klein gegen h; wir setzen näherungsweise $A = h$ und erhalten für einen flach ansteigenden Wind ($v : h$ klein) aus der Bedingung $P = 0$ die stationäre Flügelgeschwindigkeit V_0:

$$2h(V_0 - v) + hV_0 = 0;$$
$$V_0 = \frac{2}{3}v.$$

Die Vertikalkomponente ist also in Wirklichkeit noch ein halbmal so groß wie das Instrument es angibt.

2. Unsere vor der Integration benutzte Wurzelentwickelung gilt auch, wenn v und V_1 groß gegen h ist; in diesem Fall wird das Anemometer, wie wir schon vorher sahen, angenähert mit der wahren Geschwindigkeit v laufen, und wir setzen daher

$$A = v\sqrt{2},$$

und erhalten als Bedingung

$$P = 2v(V_0 - v) + \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2V_0}{v} = 0,$$

$$V_0 = \frac{v}{1 + \frac{1}{4}\frac{h^2}{v^2}} = v\left(1 - \frac{1}{4}\frac{h^2}{v^2}\right).$$

Findet die Luftströmung also angenähert parallel zur Achse des Flügelrades statt, so sind die Fehler in den Angaben des Instrumentes minimal. Bei der bisherigen Anwendungsweise ist dies leider meist nicht der Fall.

Auf Grund des letzten Resultates könnte ein verbessertes Vertikalanemometer etwa nach folgendem Prinzip gebaut werden, bei welchem aus einer der gesamten Windgeschwindigkeit proportionalen Drehgeschwindigkeit die Vertikal- (bezw. Horizontal-) komponente durch Organe abgespalten wird, wie sie bei Planimetern verwandt werden. Ein leichter Stab S, der am Maste M frei beweglich aufgehängt ist, trägt an einem Ende einen „Penaudschwanz" P, durch

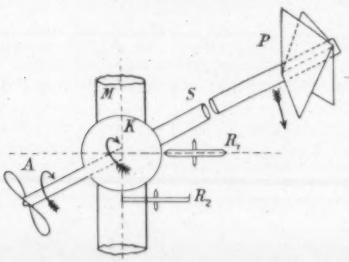


Fig. 2.

den er in die momentane Windrichtung gestellt wird, auf der anderen Seite wird er ausbalanciert durch das Anemometer A der oben beschriebenen Art, dessen Achse parallel dem Stab S läuft und in einer Kugel K endigt. Der Mittelpunkt von K liegt in der Achse der Vertikaldrehung von S. An der Kugelfläche läuft, wie es die Figur erläutert, ein Rad R, mit vertikaler Achse, dessen Drehgeschwindigkeit offenbar proportional der des Flügelrades mal dem Sinus des von S mit der Horizontalen gebildeten Winkels ist, d. h. da das Anemometer unter diesen Umsänden mit der Windgeschwindigkeit selbst läuft, proportional der Vertikalkomponente des Windes. Die Geschwindigkeit dieses Rades wird registriert.

Ähnlich gibt R_2 die wahre Horizontalkomponente an.

Aufgabe der Konstruktion ist es — möge nun die Aufteilung der Gesamtgeschwindigkeit in die Komponenten nach dem vorgeschlagenen oder einem andern Prinzip geschehen — auf ein möglichst kleines Trägheitsmoment hinzuarbeiten, so daß auch bei böigem Winde die Einstellung auf die Augenblickswerte schnell genug geschieht. Ist dies erreicht, so hat man die Sicherheit, wirklich die Komponenten der Windgeschwindigkeit und nicht deren Quadrate oder andere zusammengesetzte Größen zu messen.

(Eingegangen 17. November 1910.)

Über das Wesen der säkularen Variation des Erdmagnetismus, und Bestimmung ihres Ursprungsortes im Erdinnern.

Von Fr. Bidlingmaier.

§ 1. Das zugrundeliegende Beobachtungsmaterial.

Im deutschen Südpolarwerk, herausgegeben im Auftrag des Reichsamts des Innern von E. v. Drygalski, Georg Reimers Verlag, Berlin W. 35, habe ich im Band V: „Erdmagnetische Seebeobachtungen und anschließende Untersuchungen", Heft 3: „Deklination", im Anschluß an unsere eigenen Beobachtungen im Atlantischen und Indischen Ozean das ganze bisherige Beobachtungsmaterial, das wir seit dem 16. Jahrhundert über die Deklination besitzen, zum Vergleich herangezogen und habe mir, betroffen von den auffallenden Eigentümlichkeiten des 300 Jahre umfassenden Materials, eine Anschauung vom Wesen der säkularen Variation des Erdmagnetismus überhaupt gebildet, die hier im Auszug wiedergegeben sein möge. Wegen weiterer Einzelheiten usw. sei auf das oben erwähnte Werk verwiesen.

Es ist ein nicht hoch genug zu veranschlagendes Verdienst von W. van Bemmelen, daß er die Archive der alten seefahrenden Nationen, insbesondere die holländischen, aber auch englischen und französischen Archive, durchsucht und die vergrabenen Beobachtungen über die Abweichung des Kompasses gesammelt, sehr sorgfältig kritisch gesichtet und allgemein nutzbar gemacht hat. Siehe insbesondere das Werk: „Die Abweichung der Magnetnadel; Beobachtungen, Säkularvariation, Wert- und Isogonensysteme bis zur Mitte des XVIII. Jahrhunderts" von W. van Bemmelen, Batavia 1899. Auf Grund seiner eigenen Untersuchungen, sowie der Karten für die späteren Epochen von Hansteen, Barlow, Sabine, Neumayer hat er am Schluß des genannten Werkes Tabellen für die säkulare Variation der Deklination zusammengestellt, welche von 1600 bis 1850 von 50 zu 50 Jahren für die Schnittpunkte der Parallelkreise und Meridiane von 20 zu 20 Grad angegeben wird. Auf diesen Tabellen beruht die

folgende Untersuchung, hinzugenommen ist nur noch die Epoche von 1850—1900 aus Tillo, „Tables fondamentales du Magnétisme Terrestre", Petersburg 1896. Besonders sei noch hingewiesen auf das kleine Kärtchen am Schluß des van Bemmelenschen Werkes, die „Übersichtskarte der Säkularvariation der Deklination", welches in sehr sinnreicher Weise einen anschaulichen Überblick über das ganze bisherige Wissen der Menschheit von der Abweichung der Magnetnadel gibt.

§ 2. Die säkulare Beweglichkeit der Magnetnadel. Art ihrer Verwendung.

Zuerst müssen wir noch einen Punkt grundsätzlicher Art hervorheben: wir unterscheiden zwischen säkularer und jährlicher Änderung eines magnetischen Elements. Adolf Schmidt hat insbesondere in der Abhandlung: „Magnetische Karten von Norddeutschland für 1909", Veröffentlichungen des Kgl. Preuß. Meteorologischen Instituts, Berlin 1910, S. 23, hervorgehoben, daß in der jährlichen Änderung, d. h. in dem Unterschied zweier aufeinanderfolgender Jahresmittel eines Elements zu einem Teil noch Einflüsse stecken, deren Ursprung außerhalb des festen Erdkörpers zu suchen ist. Hier verstehen wir aber unter „säkularer Variation" nur jene einfachen, sehr langsamen und großzügigen Änderungen, deren Ursprung im Erdinnern zu suchen ist. Um nun von jenen, von Adolf Schmidt entdeckten äußeren Einflüssen freizukommen, müßten wir zur Ableitung der wirklichen säkularen Änderungen, statt wie bisher die Mittelwerte von Jahresintervallen, vielmehr die Mittelwerte viel größerer Zeiträume miteinander kombinieren. Ich habe daher im folgenden das Jahrzehnt als Zeiteinheit gewählt.

Unter der „säkularen Beweglichkeit" eines erdmagnetischen Elements verstehe ich nun die Änderung eines Elements, welche dasselbe in der Zeiteinheit, nach dem Obigen also in einem Jahrzehnt, überhaupt durchgemacht hat, ganz ohne Rücksicht auf den Sinn dieser Änderungen. Auf Grund der im letzten Paragraphen genannten Tabellen habe ich im folgenden eine Tabelle der durchschnittlichen säkularen Beweglichkeit der Magnetnadel in den letzten 300 Jahren zusammengestellt und in der Karte Figur 1 zur Anschauung gebracht.

Die Zahlen geben also in Bogenminuten den absoluten Betrag der Schwankungen, welche die Magnetnadel innerhalb des genannten Zeitraums durchschnittlich in zehn Jahren ausgeführt hat; jede Zahl ist, wie ersichtlich, aus 7 Einzelwerten abgeleitet. Zur Vorbereitung der weiteren Diskussion sind die Zahlen der Landhalbkugel fett gedruckt im Unterschied von denjenigen der Wasserhalbkugel.

Der durchschnittliche mittlere Fehler einer der obigen Zahlen ist nach den Untersuchungen von W. van Bemmelen auf höchstens ein paar Minuten zu veranschlagen. (Näheres s. Südpolar-Werk.)

Die hier mitgeteilten Beweglichkeiten des Kompasses an jedem Ort, die wir künftig mit v bezeichnen wollen, sind noch nicht streng miteinander vergleichbar; denn v hängt noch wesentlich von der Stärke der Horizontalintensität H des Ortes ab. Es ist daher kein Wunder, daß die hohen Breiten mit ihrem schwachen H durch große v ausgezeichnet sind. Erst die Produkte $S = vH$ sind streng miteinander vergleichbar; $S = vH$ stellt aber offenbar die nach magnetisch Ost-West gerichtete Komponente der ganzen Kraft dar, welche die säkulare Variation aller drei Elemente verursacht; wir wollen dieselbe künftig die „Säkularkraft" nennen.

Da nun die H mit genügender Genauigkeit bekannt sind, so liefert uns die Tabelle unmittelbar das System der Ost-Westkomponenten der Säkularkraft, welche durchschnittlich im

Durchschnittliche säkulare Beweglichkeit der Deklination seit 1600.

Länge / Breite	120	140	O 160	180	W 160	140	120	100	80	60	40	W 20	0	O 20	40	60	80	100
N 60	**37′**	**59′**	**76′**	**44′**	**43′**	**86′**	**109′**	**107′**	**108′**	**156′**	**121′**	**120′**	**125′**	**112′**	**72′**	**91**	**113′**	**46′**
40	**18**	**42**	**39′**	28	36	**55**	**46**	**65**	**48**	**51**	**90**	**104**	**122**	**95**	**75**	**102**	**58**	**33**
20	**16**	35	30	31	25	41	36	**46**	**28**	**31**	**51**	**82**	**100**	**83**	**59**	**63**	**47**	**42**
0	22	22	19	23	36	30	36	29	26	**40**	**73**	**94**	**81**	**104**	**62**	**67**	**34**	**24**
20	35	19	12	24	14	30	34	43	37	53	**76**	**120**	**105**	**108**	**61**	**60**	68	28
40	44	42	25	23	22	46	60	70	52	46	82	127	**129**	**104**	56	24	41	72
S 60	92	74	58	28	58	48	76	88	54	54	73	110	118	110	72	60	71	66

Laufe von zehn Jahren an jedem Ort wirksam gewesen ist. Da unsere Kenntnisse über die anderen Elemente sehr viel spärlichere sind, wollen wir uns hier auf die eine Komponente beschränken, und wir dürften, streng genommen, in dieser Arbeit immer nur von der Ost-Westkomponente der Säkularkräfte sprechen. Aber bei einigen allgemeinen Aussagen, welche nur die Durchschnittswerte und weite Räume und lange Zeiten betreffen, werden wir uns die Annahme erlauben, daß die Tätigkeit der Komponente auf eine entsprechende Tätigkeit der ganzen Kraft hinweist, daß der Grad der Tätigkeit von Komponente und von ganzer Kraft im Durchschnitt zueinander in einem festen Verhältnis stehen. Diese Annahme liegt in der Natur der Sache begründet und wird außerdem durch die tagtägliche Erfahrung an unseren Variationskurven aller drei Elemente bestätigt, welche die Registrierapparate unserer erdmagnetischen Observatorien liefern; was von diesen raschen Störungen gilt, können wir unbedenklich auch für unsere langsamen Störungen der Säkularkräfte annehmen und werden uns demgemäß erlauben, zutreffendenfalls statt von ostwestlichen Säkularkräften von Säkularkräften überhaupt zu sprechen.

§ 3. Zusammenstellung einiger Erfahrungstatsachen über die Säkularkräfte.

Wir beschränken uns hier darauf, aus der obigen Tabelle der v einige allgemeine Durchschnittswerte herauszuziehen und zu weiteren Schlüssen zu verwerten. Mit dem Symbol $\mathfrak{M}_i(g)$ bezeichnen wir den Mittelwert verschiedener gleichartiger Größen g und deuten durch den Index i näher an, über welchen Bereich dieser Mittelwert genommen ist. Zuerst vergleichen wir

I. Die Säkularkräfte der verschiedenen Breitenzonen.

Wir stellen den $\mathfrak{M}_q(v)$ die zugehörigen Mittelwerte der Horizontalintensität H und Totalintensität F, die wir Tillo entnehmen, zu weiterer Verwendung voran.

$$1\,\gamma = 1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}}\,g^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}^{-1}.$$

φ	$\mathfrak{M}_q(H)$	$\mathfrak{M}_q(F)$	$\mathfrak{M}_q(v)$	$\mathfrak{M}_q(S)$	$\frac{S}{HF}\cdot 10^2$
60	0,140	0,565	90,3′	368 γ	(46)
40	0,214	0,502	61,5	436	36
20	0,325	0,407	47,0	444	34
0	0,339	0,353	45,7	450	38
20	0,297	0,389	51,5	445	38
40	0,238	0,474	59,2	410	36
60	0,177	0,568	72,8	375	37
Mittelwerte	0,252	0,466	61,2′	418 γ	

Die einzelnen $\mathfrak{M}_q(v)$ sind auf einige Zehntelminuten, die $\mathfrak{M}_q(S)$ auf einige γ genau; bei dem Mittelwerte über die ganze Erde ist daher die Zehntelminute bzw. 1 γ genau. Auf Grund der obigen Tabelle können wir also folgende Sätze aufstellen:

1. Die durchschnittliche säkulare Beweglichkeit der Deklination beträgt auf der ganzen Erdoberfläche in einem Jahrzehnt rund 1 Grad.

Wie oben erwähnt, kommt dieser Tatsache jedoch mehr nur eine äußerliche Bedeutung zu; die tiefere Bedeutung enthält der entsprechende Satz 2.

2. Die durchschnittliche Ost-Westkomponente der Säkularkraft, welche in einem Jahrzehnt auf der ganzen Erdoberfläche wirksam wird, beträgt 418 γ, d. h. rund $1^1/_2$ Proz. der mittleren Horizontalintensität der Erdoberfläche.

Vergleicht man die Tätigkeit der Säkularkräfte in den einzelnen Breitenzonen, so sind die Unterschiede nicht sehr erheblich, im Gegensatz zur Beweglichkeit des Kompasses. Wir können sagen:

3. Die Tätigkeit der Säkularkräfte ist unter dem Äquator am stärksten und nimmt ziemlich gleichmäßig und nur wenig nach den Polen zu ab.

Es besteht eine bemerkenswerte Ähnlichkeit im Gang der S und des Produkts FH bezw. $F^2 \cos i$ mit der Breite; dies zeigt die letzte Spalte der obigen Tabelle, welche den Proportionalitätsfaktor beider Größen für die einzelnen Breitenzonen gibt. Bis auf die Zone $+60^0$, welche der singulären Stelle des magnetischen Pols sehr nahe liegt, ist die Proportionalität eine bemerkenswerte, jedoch kaum gut genug, um die Möglichkeit eines Zufalls ganz auszuschließen.

II. Die Säkularkräfte der verschiedenen Meridianstreifen.

Mit Hilfe der grundlegenden Tabelle in § 2 und der aus Tillo entnommenen Mittelwerte von H für die einzelnen Meridianstreifen $\mathfrak{M}_i(H)$ erhalten wir folgende kleine Zusammenstellung (siehe nächste Seite).

Diese Zusammenstellung ergibt den Erfahrungssatz:

4. Die Säkularkräfte der verschiedenen Meridianstreifen weisen im Gegensatz zu den Breitenzonen sehr erhebliche Unterschiede auf. Am stärksten sind sie tätig im Grenzgebiet zwischen dem Atlantischen Ozean und den ostwärts liegenden Kontinenten; am schwächsten im Zentralgebiet des Großen Ozeans.

λ	120	140	O 160	180	W 160	140	120	100	80
$\mathfrak{M}_\lambda(v)$	37,7′	41,9′	37,0′	28,7′	33,4′	48,0′	56,7′	64,0′	50,4′
$\mathfrak{M}_\lambda(H)\cdot 10^{-5}$	270	272	274	277	274	273	273	270	262
$\mathfrak{M}_\lambda(S)\cdot 10^{-5}$	295	332	295	232	267	382	451	503	384

λ	60	40	W 20	0	O 20	40	60	80	100
$\mathfrak{M}_\lambda(v)$	61,6′	80,9′	108,1′	111,4′	102,3′	65,3′	66,7′	61,7′	44,4′
$\mathfrak{M}_\lambda(H)\cdot 10^{-5}$	251	242	241	240	239	244	253	264	269
$\mathfrak{M}_\lambda(S)\cdot 10^{-5}$	450	570	**758**	**778**	**712**	464	492	474	347

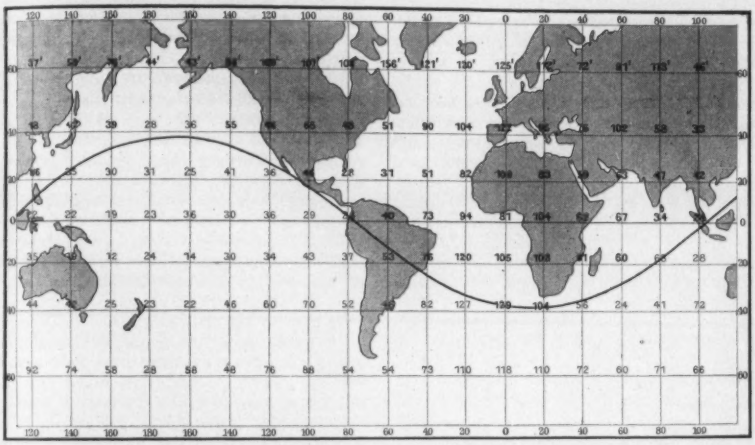


Fig. 1. Die säkulare Beweglichkeit der Deklination zwischen 1600 und 1900. Nach den Forschungen von W. van Bemmelen entworfen von Fr. Bidlingmaier. Die Zahlen geben in Minuten den absoluten Betrag der Bewegung, welche die Magnetnadel durchschnittlich in 1 Jahrzehnt ausgeführt hat. Die Kurve ist das Abbild des Großkreises, welcher die Landhalbkugel von der Wasserhalbkugel trennt.

Wir kommen hiermit zu dem Gegensatz in der Tätigkeit der Säkularkräfte auf dem Wasser und auf dem Lande.

III. Die Säkularkräfte der Wasserhalbkugel und der Landhalbkugel.

Schon ein flüchtiger Blick auf unsere Karte zeigt die auffallende Tatsache, daß die Beweglichkeit der Deklination auf den großen Kontinenten und dem verhältnismäßig schmalen Streifen des Atlantischen Ozeans eine sehr viel größere ist, als auf der weiten Wasserfläche des Großen Ozeans. Wir wollen diese Tatsache in einfachster Form zahlenmäßig zur Darstellung bringen und übernehmen die bekannte Einteilung der Erde in eine Wasser- und eine Landhalbkugel. Als Maß für die säkulare Tätigkeit beider Halbkugeln fassen wir die Größen $\Sigma\Sigma o S$, gebildet je über die ganze Halbkugel, auf. Die einzelnen S einer Halbkugel werden mit der Oberfläche o des durch sie vertretenen Gebiets multipliziert; am Äquator sei $o = 1$; demnach ist auf der Breite φ $o_\varphi = \cos\varphi$. Die Zuordnung der einzelnen S zu den beiden Halbkugeln ist durch die Karte im allgemeinen ersichtlich und durch die Haupttabelle in § 2 noch besonders kenntlich gemacht. Wir erhalten folgendes Resultat (S_L, S_W sind die Säkularkräfte der Land- bzw. Wasserhalbkugel):

φ	$\Sigma o\, S_L$	$\Sigma o\, S_W$
60	0,0331	—
40	570	0,0035
20	576	176
0	571	240
20	430	322
40	124	414
60	—	338
Summe $\Sigma\Sigma$	0,**260**2	0,**155**3

$$V = \frac{\Sigma\Sigma o\, S_L}{\Sigma\Sigma o\, S_W} = \frac{2602}{1555} = 1{,}672\,.$$

Die Zahl V gibt, wie oben ersichtlich, das Verhältnis zwischen der säkularen Tätigkeit auf der Land- und Wasserhalbkugel. Wir dürfen sagen:

5. Die Tätigkeit der Säkularkräfte ist auf der Landhalbkugel 67 Proz. stärker als auf der Wasserhalbkugel.

§ 4. Erklärung der säkularen Variation des Erdmagnetismus.

Die auffallende Tatsache des 5. Erfahrungssatzes weist uns den Weg zur Erklärung der Säkularkräfte. Danach ist die Ursache der Säkularvariation jedenfalls in Erdräumen zu suchen, in welchen der Unterschied von Wasser und Land sich noch wesentlich bemerkbar macht. Klare Gründe für dauernd tätige elektrische Ströme in der oberen Erdkruste, deren magnetisches Feld die Säkularvariation erzeugen würde, vermag ich keine zu finden; wir müssen daher an temporär magnetische Massen denken. Mit der Tiefe nimmt aber auch die Temperatur zu, und mit zunehmender Temperatur verschwindet bald die Möglichkeit für das Vorhandensein magnetischer Massen: wir wissen bereits bei 800° ist die Magnetisierbarkeit aller Stoffe so gut wie ganz verschwunden, während permanenter Magnetismus schon viel früher zerstört wird. Nun liegt es sehr nahe, das Entstehen und Verschwinden magnetischer Massen mit dem Einsetzen bezw. dem Verschwinden der Magnetisierbarkeit bei den hohen Temperaturen in Zusammenhang zu bringen. Diese Anschauung wird in hohem Maße durch die auffallenden Verhältnisse gestützt, unter welchen sich jenes Einsetzen der Magnetisierbarkeit, bei Eisen z. B. dicht unterhalb 800°, vollzieht.

Aus den sehr zahlreichen Versuchen hierüber wählen wir eine Arbeit von Morris, Phil. Mag. **44**, 1897, heraus, der wir für eine Feldstärke $\mathfrak{H} = 0{,}378$, also von der Größenordnung des Erdfeldes, den Gang des Magnetisierungskoeffizienten $\varkappa$ mit der Temperatur entnehmen; der Versuch ist an einem Stück schwedischen Eisens gemacht.

Man sieht, unmittelbar an der Grenze der Magnetisierbarkeit ($\varkappa = 0$) treffen wir das außerordentlich rasch und hoch emporschnellende Maximum der Magnetisierbarkeit an, das bei einer Temperatur von etwa 750° liegt, um mit abnehmender Temperatur fast ebenso rasch wieder zu fallen.

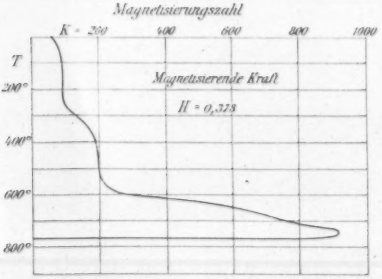


Fig. 2. Gang des Magnetisierungskoeffizienten $\varkappa$ von Eisen mit der Temperatur. (Feldstärke = 0,378.) Nach Morris.

Dieses Temperaturgebiet spielt überhaupt in mehrfacher Beziehung eine ausgezeichnete Rolle: durchläuft z. B. die Temperatur eines erhitzten Eisenstückes dieses Gebiet in zunehmendem Sinne, so wird daselbst die regelmäßige Ausdehnung durch ein plötzliches Zusammenziehen unterbrochen und umgekehrt (Gore); die Abkühlung eines sich selbst überlassenen Eisenstücks erleidet an dieser Stelle eine plötzliche Unterbrechung und vermag sogar in eine vorübergehende Erwärmung überzugehen (Barrett); auch das elastische, das elektrische und thermoelektrische Verhalten des Eisens zeigt bei jener Temperatur auffallende Eigentümlichkeiten. Offenbar finden in der Nähe von 750° bedeutende Veränderungen in der inneren Struktur des Eisens statt. Man hat deshalb diese Temperatur die „Umwandlungstemperatur" genannt.

Ich stelle nun den Satz auf:

Die säkulare Variation des Erdmagnetismus wird verursacht durch das Entstehen und Verschwinden magnetischer Schichten im Erdinnern, deren Temperatur in der Nähe der sogenannten Umwandlungstemperatur der magnetisierbaren Stoffe liegt. Seiner Verbreitung und seiner hohen Magnetisierbarkeit wegen wird das Eisen die Hauptrolle spielen. Demgemäß wird die Temperatur jener Schichten in der Nähe von 750° liegen. Solange ihre Temperatur noch etwas darüber liegt, sind die Schichten unmagnetisch; bei eintretender Abkühlung werden sie unter dem Einfluß des erdmagnetischen Feldes bald sehr stark magnetisch. Umgekehrt genügt schon eine geringe Erwärmung, um maximal magnetisierte Schichten gänzlich ihres Magnetismus zu berauben.

Von dieser Anschauung heraus ist zunächst der qualitative Inhalt unserer Erfahrungssätze leicht zu verstehen; vor allem die Tatsache, daß auf dem Wasser die Säkularkräfte sehr viel schwächer tätig sind als auf dem Lande. Sind wir doch auf dem Meer von der Isothermenfläche 750° und damit von den magnetischen „Umwandlungsschichten" um die ganze Meerestiefe weiter entfernt, als auf dem Lande; das magnetische Feld eines Magneten nimmt aber mit der 3. Potenz der Entfernung ab. Dazu kommt, daß wir unter dem Meer im allgemeinen einen regelmäßigeren und schwächer gekrümmten Verlauf der Isothermenflächen zu erwarten haben, als unter den Kontinenten. Ebene Isothermen-

flächen sind aber beständiger als gekrümmte, damit auch die von ihnen abhängenden Magnetismen. So verstehen wir auch schon den Satz 4; wahrscheinlich hängt die besonders starke Tätigkeit der Säkularkräfte in den Meridianstreifen von Afrika und Europa und dem angrenzenden Gebiet des Atlantischen Ozeans mit der geringeren Beständigkeit der unter diesem Gebiet besonders stark gekrümmten Isothermenflächen zusammen.

Ich nenne „Umwandlungsschichten" diejenigen Schichten des Erdinnern, deren Temperatur in der Nähe der sogenannten „Umwandlungstemperatur" liegt, also einer Temperatur, bei welcher alle physikalischen Eigenschaften der magnetisierbaren Stoffe ein so auffallendes Verhalten zeigen.

Satz 3 endlich wird verständlich, wenn wir bedenken, daß, dem beschränkten Temperaturbereich der starken Magnetisierbarkeit entsprechend, die Mächtigkeit der magnetischen Umwandlungsschichten im Verhältnis zu ihrer horizontalen Erstreckung nur eine geringe sein kann; diese Schichten lassen sich demgemäß leichter horizontal als vertikal magnetisieren. So leuchtet ein, daß unter dem Äquator im Durchschnitt stärkere magnetische Massen auftreten als polwärts, trotz der Zunahme der Totalintensität nach den Polen zu.

Wir wollen nun zeigen, daß sich unsere Hypothese nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ in schöner Weise bewährt.

§ 5. Bestimmung des Ursprungsortes der Säkularkräfte aus den Temperaturverhältnissen der Erdrinde.

Aus der entwickelten Anschauung heraus ist es nicht schwer, die Tiefe der magnetischen Umwandlungsschichten, den Ursprungsort der Säkularvariation, zu bestimmen: es ist die Tiefe der Isothermenfläche von der Umwandlungstemperatur der magnetisierbaren Stoffe, wir nehmen an des Eisens, also die Tiefe der Isothermenfläche von 750°. Der enge Temperaturbereich der auffallend starken Magnetisierbarkeit läßt sogar eine Tiefenbestimmung mit einer für geophysikalische Verhältnisse großen Schärfe zu. Unsere Schichten liegen jedenfalls zwischen den Isothermenflächen von 600° und 800° und liegen in der nächsten Umgebung der Isothermenfläche 750°.

Nun kennen wir die einer Temperaturerhöhung von 1° entsprechende Zunahme der Tiefe, die sogen. „geothermische Tiefenstufe":

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = 33 \text{ m}.$$

Aus der Lehre der Wärmeleitung wissen wir aber, daß dieser Quotient in der Nähe der Oberfläche sich nur ganz langsam ändert, in unserem Falle nicht mehr, als der mutmaßliche Fehler des Quotienten selber beträgt[1]). Damit kommen wir zu dem Schluß:

Der Ursprungsort der säkularen Variation des Erdmagnetismus ist in dem Gebiet zwischen 20 und 26 km Tiefe unterhalb der festen Erdoberfläche zu suchen; das tätigste Gebiet liegt in etwa 25 km Tiefe.

§ 6. Bestimmung des Ursprungsortes der Säkularkräfte aus den erdmagnetischen Beobachtungen.

Die Erfahrungstatsachen über die Säkularvariation, die wir in § 3 zusammengestellt haben, bieten uns aber noch ein zweites, ganz verschiedenes Mittel zur Ortsbestimmung der Quelle der Säkularkräfte. Wir haben die auffallende Verminderung ihrer Tätigkeit auf dem Meer in erster Linie der größeren Entfernung der maßgebenden Isothermenflächen von der Meeresoberfläche zuzuschreiben. Bekanntlich treffen wir auf dem Grund des freien Meeres überall die Isothermenfläche von 0° an, in einer Tiefe also, in welcher wir unter den Kontinenten bereits Temperaturen von etwa 150° zu erwarten haben.

Die mittlere Meerestiefe beträgt rund 3,7 km; wir sind also auf dem Meere von dem Ursprung der Säkularkräfte um 3,7 km weiter entfernt als auf dem Land. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß die Isothermenflächen der festen Erdoberfläche parallel laufen, was nicht streng der Fall ist. Vielmehr werden unter den Kontinenten die Isothermenflächen die Bodenerhebung nicht genau mitmachen, sondern dagegen etwas zurückbleiben, so daß die Entfernung der Isothermenfläche 750 von der Oberfläche des Festlandes etwas größer sein wird, als von dem Meeresgrund. Dafür gibt aber, wie wir sahen, die stärkere Krümmung jener Flächen unter dem Festlande Anlaß zu einer regeren thermischen und nach unserer Auffassung auch magnetischen Tätigkeit, so daß sich beide Umstände bis zu einem gewissen Grade ausgleichen werden.

Zahlenmäßig faßbar ist für uns in erster Linie die der mittleren Meerestiefe entsprechende Entfernungsdifferenz von 3,7 km. Ihr entspricht der Unterschied in der Tätigkeit der Land- und Wasserhalbkugel, den wir durch die Größe V in § 3 zahlenmäßig ausgedrückt haben. Zufolge der bekannten Abnahme des Feldes eines Magneten mit der Entfernung, können wir nun für die unbekannte Tiefe h der magnetischen

1) Thomson u. Tait, Natural Philosophy, Part II, p. 477, Cambridge 1903.

Umwandlungschichten unter dem Meeresgrund die Gleichung ansetzen:

$$\left(\frac{h+3{,}7}{C}\right)^3 = 1{,}672$$

$$h = \frac{3{,}7}{0{,}187} = 19{,}8 \text{ km}.$$

Das gibt eine Tiefe von mehr als 20 km unter dem Festland, von etwa 24 km unter der Meeresoberfläche. Wir haben also gefunden: Aus rein magnetischen Betrachtungen ergibt sich, daß die Quelle der Säkularvariation des Erdmagnetismus in einer Tiefe von 20—25 km unter der Erdoberfläche zu suchen ist.

* * *

Die Übereinstimmung der beiden Ortsbestimmungen für den Ursprung der Säkularkräfte mittels zweier ganz verschiedener Methoden, die sich auf zwei ganz verschiedene Gebiete der Geophysik gründen, ist eine sehr gute zu nennen; wir dürfen in ihr eine kräftige Stütze für unsere Anschauung erblicken.

Die Karten der isomagnetischen Linien, welch letztere wir im Lauf der Jahrhunderte über die Erdoberfläche dahinziehen sehen, stellen wichtige Urkunden für die Erdgeschichte dar. Bisher haben wir diese Urkunden immer nur gesammelt, nie entziffert; die säkulare Variation war uns ein Rätsel. Es entsteht nun die reizvolle Aufgabe, mittels des hier gegebenen Schlüssels, einer Anschauung, die wir hier nur in ganz groben Zügen geben wollten und konnten, den Inhalt der bereits mehr als 300 Jahre umfassenden magnetischen Karten aufzuschließen und eine Geschichte des Erdinnern zu schreiben, wenigstens für die Erdräume bis zur Tiefe von 25 km hinab. Nur durch die allseitige Erprobung wird sich zeigen, was an unserer Anschauung richtig ist. Insbesondere aber wäre es in hohem Maße zu begrüßen, wenn die säkulare Variation des Erdmagnetismus und die in ihr verborgene Erdgeschichte die verschiedenen einsam wandelnden Gebiete der Geophysik mehr in Zusammenhang zu gegenseitiger Befruchtung bringen würde. Insbesondere wird die Geologie von so exakten „Leitlinien", wie es die isomagnetischen Linien sind, manchen Aufschluß erwarten dürfen.

Wilhelmshaven, Kaiserliches Observatorium, November 1910.

(Eingegangen 19. November 1910)

Eine Hochspannungsbatterie für statische Zwecke.

Von Heinrich Hörig.

Das Bedürfnis nach einem hohen Hilfspotential für ein Binantenelektrometer[1]) hat mich veranlaßt, mir die nachstehend beschriebene Batterie zu bauen. Der Apparat ist eine technische Aggregierung von 20 einzelnen Batterien von je 121 Kupfer-destilliertes-Wasser-Zink-Elementen. Die Batteriegefäße sind nach dem Vorgange von Herweg[2]) aus Paraffin hergestellt, bezüglich der einzelnen Elementchen und ihres Einbaues verweise ich auf seine Arbeit; darüber ist hier nichts Neues mitzuteilen.

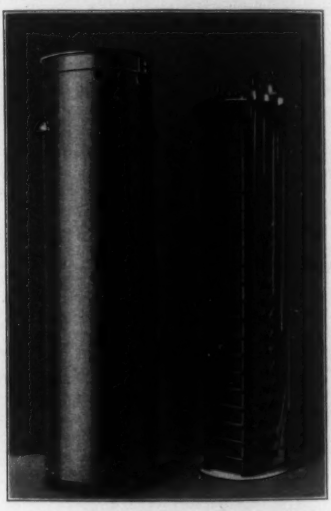


Fig. 1.

Besonderes Gewicht habe ich auf eine wohldefinierte Isolation der verbindenden Leitungen und des ganzen Schaltapparates gelegt. Der zur Verwendung gelangte Hartgummi erhielt einen Paraffinüberzug und ist an allen maßgebenden Stellen vor Licht geschützt. Das sind bekanntlich zwei Bedingungen, deren Erfüllung für dauernd gute Isolation unerläßlich ist. Viele Unzuträglichkeiten von Akkumulatorenbatterien verdanken wohl der technischen Nichtbeachtung dieses Umstandes ihren Ursprung. Ferner sind alle Leiterteile, die mit größeren Potentialdiffe-

1) Dolezalek, Ann. d. Phys. **26**, 312, 1908.
2) Diese Zeitschr. **7**, 663, 1906.

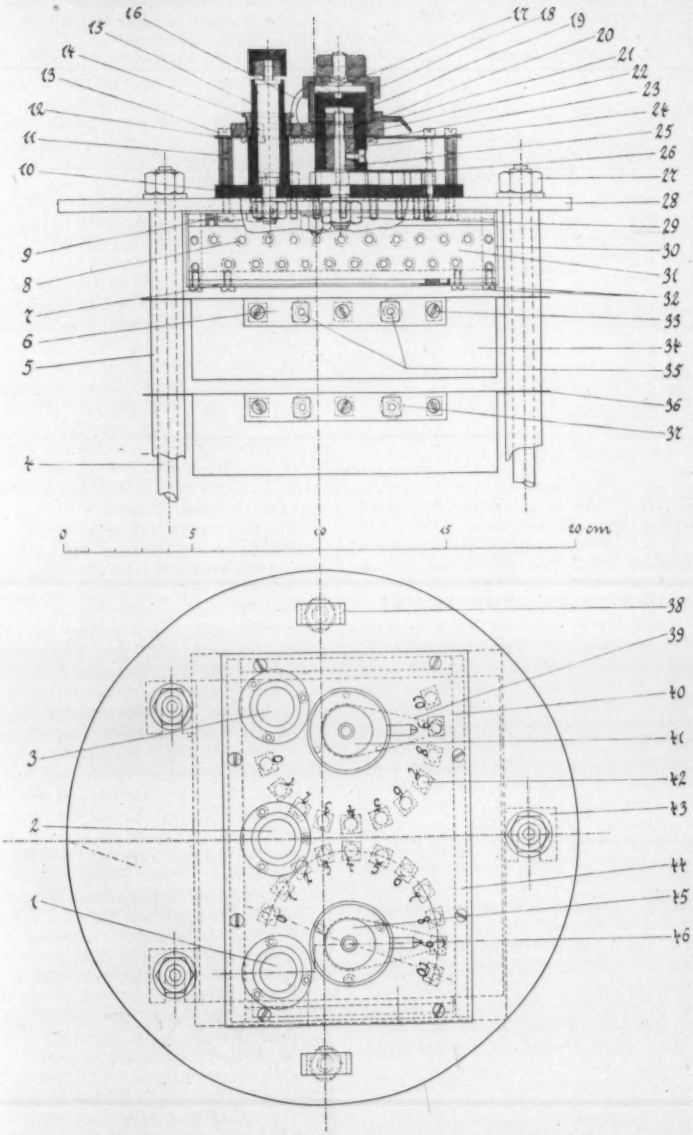

16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
17 18 19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
0 5 10 15 20 cm
38
39
40
41
42
43
44
45
46
3
2
1

Fig. 2.

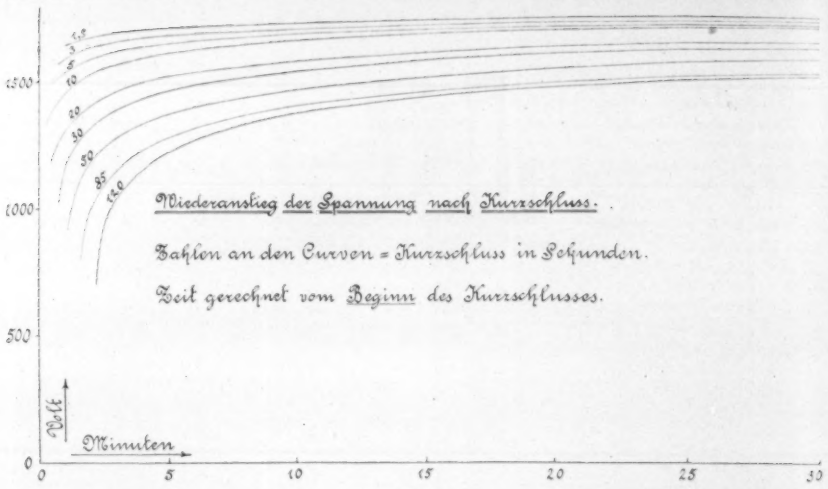


Fig. 3.

renzen sich in Luft in geringen Entfernungen gegenüberstehen, also der ganze Schaltapparat und die sich teilweise kreuzenden Verbindungen, in staubdicht schließende Kästen eingebaut, so daß man annehmen darf, sich von den aus elektrostatisch herangezogenen Staubteilchen resultierenden Isolationsfehlern befreit zu sehen.

Was schließlich die Frage der Abhängigkeit der Spannung von der Temperatur anbelangt — Herweg[1]) hat sie zu rund 0,5 Proz. pro Grad C ermittelt —, so habe ich mich bemüht, rasche Temperaturschwankungen für die Messung durch Einbau der ganzen Batterie in einen doppeltwandigen Weißblechzylinder (8 mm Luftzwischenraum) möglichst unschädlich zu machen. Auf den hierdurch erzielten Effekt, sowie überhaupt auf die Dauerkonstanz der Batterie gedenke ich nach Gewinnung genügender Erfahrung an anderer Stelle zurückzukommen.

Für die durchschnittliche Elektrometerpraxis — für Präzisionszwecke sei z. B. auf die Batterie von Fr. Krüger[2]) verwiesen — dürfte die Konstanz ausreichen, a fortiori natürlich für Vorlesungszwecke.

Fig. 1 zeigt rechts die aus dem Blechgehäuse herausgezogene Batterie. Drei Eisenstäbe von 7 mm Durchmesser halten mittels 34 mm langer Gasrohrstückchen (5)[3]) die aus 0,45 mm starkem Weißblech in den lichten Dimensionen 120×120×30 mm gelöteten Batteriekästen (34) an ihren Fahnen (36), (43) in wohldefinierter und doch wie erwünscht etwas elastischer Art fest. Zwei kreisförmige Eisenplatten, die untere (siehe Fig. 1) 2 mm, die obere (28) 5 mm stark, werden von den drei Stäben durchsetzt und das ganze Aggregat wird durch die drei Muttern oben (27) und unten zusammengepreßt. Die einzelnen Blechkästen besitzen mit drei Schrauben (33) befestigte Hartgummileisten (6), an deren beide durch die genügend weiten Bohrungen (37) isoliert durchgehenden Klemmschrauben (35) im Innern die Enden der Batterie verlötet sind. Die Fahnen (36), (43) der Kästen sind so ausgeklinkt, daß nach Lösung der Verbindungsdrähte (nur in Fig. 1 zu sehen) und Lockerung der Muttern (27) jeder einzelne Kasten ohne weitere Demontage herausgezogen werden kann.

Der Schaltapparat. Die obere Platte (28) besitzt einen rechteckigen Ausschnitt (84×125 mm) (40) der durch die 5 mm starke Hartgummiplatte (10) überdeckt wird. Sie ist durch die Schrauben (9), welche gleichzeitig den an der Unterseite der runden Platte befindlichen Kasten (30) anpressen und ihr Muttergewinde in dem Messingrahmen (11), (44) finden, in ihrer Lage fixiert. Die Kontaktknöpfe (42) sind in zwei Halbkreisen angeordnet; korrespondierend dazu findet man auf der durch Schrauben (13) befestigten Platte (12) Zahlen aufgeschlagen, nach denen die beiden

1) l. c. S. 664.
2) Diese Zeitschr. 7, 182, 1906.
3) Diese in ( ) gesetzten Zahlen sind die Erläuterungszahlen auf Fig. 2.

Kurbeln (41), (45) gestellt werden. Die Konstruktion der letzteren und der drei Anschlußklemmen (1), (2), (3) ist im Aufriß zu sehen. Die im Grundriß, in besonderer Punktierung, gezeichnete Schnittlinie (46) korrespondiert mit den im Aufriß im Schnitt gezeichneten Teilen des oberen Kastens. Gekreuzte Schraffierung = Hartgummi.

Um die durch eine Mutter (29) fixierte Spindel (25) dreht sich der mit einer nie gleichzeitig 2 Knöpfe berührenden Kontaktfeder (26), (39) versehene, durch Muttern und Unterlegscheibe (20) gesicherte Zylinder (23), ihn umgibt der Hartgummikörper (24), nimmt ihn, wie ersichtlich, durch eine kleine radiale Schraube mit, und erhält seinerseits durch die mit Mitnehmerstiften versehene Platte und Spindel (17) seinen Antrieb von dem außen sichtbaren Kurbelkopfe (18). Das Gehäuse (22) ist, wie im Grundriß zu sehen, durch 3 Schrauben an die Drehplatte befestigt. Der geränderte Kopf (18) trägt vermittelst des Messingrohres (19) den Zeiger (21). Die 3 Anschlußklemmen (1), (2), (3) sind durch Hartgummi (15) isoliert mit Stopfbüchsen (14) durch den Deckel (12) geführt.

Der Kasten (30) an der Unterseite von (28) besteht aus 1 mm starkem Messingblech und hat ein Kantengerüst von 4×4 mm Stabmessing. Die im Aufriß dem Beschauer zugekehrte Seite ist aus einer in der erforderlichen Weise eingenuteten 5 mm starken Hartgummiplatte (31) hergestellt, durch welche, wie man sieht, 21 Schrauben (8) hindurchgehen, an deren Köpfe im Innern die zu den Kontaktschrauben führenden Drähte angelötet sind. Außen vermitteln sie den Anschluß zu den einzelnen Kästen; siehe Fig. 1. Alle Verbindungen, außen wie innen, sind in paraffinierten Glasröhren geführt. Den Kasten (30) verschließt staubdicht der aufgeschraubte (32) Deckel (7).

Die Klemme (2) ist mit der Mitte der Batterie, die Klemmen (1) und (3) sind mit den Kurbeln verbunden. Symmetrisch von der Mitte ausgehend liegen die einzelnen Kästen derart an den Kontaktknöpfen, daß im Falle beiderseitig auf Nr. 10 gestellter Zeiger alle 20 Kästen hintereinander geschaltet zwischen (1) und (3) liegen. Stehen beide Zeiger auf Nr. 0, so sind sie von der Batterie abgeschaltet und kurzgeschlossen.

Entsprechend den Klemmen (1), (2), (3) sind die Wandungen der beiden Blechzylinder (der äußere 218×845 mm) von 3 die Experimentierleitungen zentrisch fassenden Klemmen durchsetzt (Hartgummi, paraffiniert). Die beiden Zylinderböden haben je 3 Löcher, durch welche

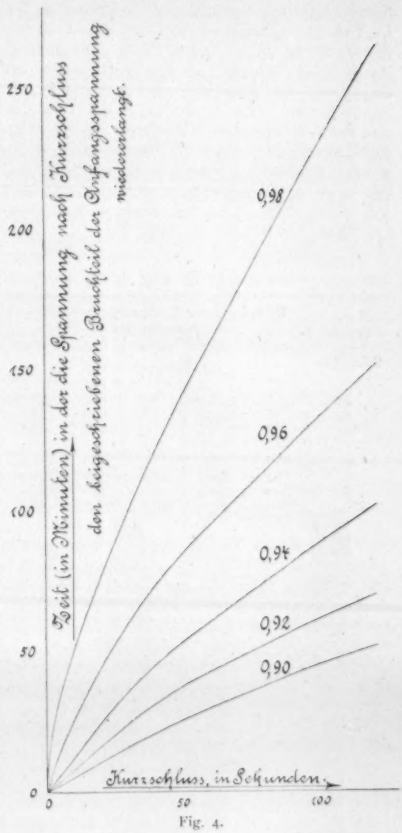


Fig. 4.

die Stäbe (4) gehen und unten, innerhalb des durch den eisernen Rand (Fig. 1) gegebenen Raumes halten 3 Muttern Batterie und Hülle zusammen. Das Ganze ist mit Deckel und zwei Muschelhandgriffen versehen. Aus Montagerücksichten sind die beiden Ösen (16), (38) vorgesehen. — Das Gewicht inklusive Schutzhülle beträgt 22 kg. —

Die Maximalspannung der Batterie beträgt 1750 Volt, also pro Kasten 87,5 Volt und pro Elementchen 0,72 Volt. Um ein Urteil über die Erholungsfähigkeit der Batterie nach Kurzschluß zu erlangen, wurde die Maximalspannung — mangels eines besseren Instrumentes — an das bekannte Braunsche Elektrometer angelegt (Fehler etwa 2 Proz.) und der Wiederanstieg der

Spannung nach Kurzschluß aufgenommen. Die in Fig. 3 mitgeteilten Kurven ähneln denen, die Herweg (l. c.) zeigt. Ihre zahlenmäßige Analysierung scheitert an der Nichtkenntnis der Spannung im Momente der Aufhebung des Kurzschlusses. Eine genaue Untersuchung müßte mit dem Pendelunterbrecher und einem „trägheitslosen" Elektrometer (Seitenelektrometer) gemacht werden. — Praktisch dürfte Fig. 4 und die dazu gehörige Tabelle genügend darüber orientieren, was man bei den jeweiligen Ansprüchen der Batterie zumuten darf.

Tabelle zu Fig. 4.

Kurzschluß in Sekunden	Erholungsdauer in Minuten bis Wiedererlangung von der Anfangsspannung				
	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98
3	1,1	1,9	3,8	10,0	32,0
5	2,1	3,6	6,6	15,6	36,0
10	4,1	6,4	11,3	23,5	48,5
20	10,7	16,9	26,5	50,0	78,5
30	16,0	24,0	37,0	60,0	110,0
50	24,5	37,5	57,6	91,0	146,0
85	39,5	54,5	74,0	109,5	190,0
120	52,0	70,5	98,0	153,0	268,0

Ob in diesen Kurven auch ein Wendepunkt existiert, wie ihn Herweg (l. c.) angibt, läßt sich nicht sagen; jedenfalls gewinnt man den Eindruck, daß für längere Kurzschlüsse zunächst noch eine nahezu gradlinige Extrapolation der Kurven Fig. 4 gestattet sein dürfte.

In einer etwas modifizierten Form wird diese Batterie voraussichtlich im Handel erscheinen, weiteres wird mitgeteilt werden.

Leipzig, Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität, November 1910.

(Eingegangen 2. Dezember 1910.)

Ein vereinfachtes Funkenphosphoroskop. (Un phosphoroscope à étincelles simplifié.)

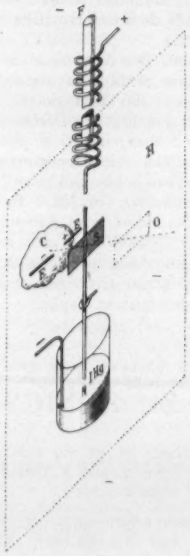
Von Paul L. Mercanton.

Sowohl für Unterrichtszwecke als auch für rasche Versuche kann die Konstruktion eines einfachen Phosphoroskops tatsächliche Dienste leisten. Es erscheint mir daher nützlich, hier kurz eine Anordnung zu beschreiben, die ich bereits im Jahre 1908 ersonnen und mit Erfolg erprobt habe. Es handelt sich um eine Abart des Funkenphosphoroskops von Lenard. Ihr ganzes Verdienst liegt in der Leichtigkeit ihrer Herstellung und in ihrem niedrigen Preise. Der Foucaultsche Unterbrecher des Lenardschen Apparates ist durch einen Margotschen Unterbrecher ersetzt worden, der seinerseits ein Abkömmling der Rogetschen „Spirale" ist. Eine Drahtspirale aus Kupfer oder Messing, oder auch aus gehärtetem Aluminium mit großer Windungszahl läuft in zwei geradlinige Stücke aus. Mit einem dieser Enden befestigt man sie vertikal an einem Halter; das andere Ende reicht bis auf kaum einige Millimeter über die Oberfläche eines Quecksilberbades, das von einer einige Zentimeter hohen Wasserschicht bedeckt ist. Dieses Quecksilberbad ist mit einem der Pole des Primärkreises des Induktors verbunden. Der andere Pol ist mit dem festen oberen Ende der Spirale verbunden. Übt man einen leichten Zug am anderen Ende dieser Spirale aus, so taucht dieses Ende in das Quecksilber ein, und der Primärkreis schließt sich. Der Strom erregt eine wechselseitige Anziehung zwischen den Windungen, diese nähern sich einander und öffnen dabei den einen Augenblick lang geschlossen gewesenen Stromkreis. Der Funke geht dann in der Sekundären über. Aber infolge ihrer Trägheit und ihrer Elastizität schwingt die Spirale longitudinal weiter und schließt und unterbricht dabei periodisch den Stromkreis in einem Rhythmus, der eben von der Konstruktion des Apparates abhängt. Je größer die Masse der Spirale, und je schwächer ihre elastische Reaktion ist, um so langsamer ist auch die Schwingung. Durch Änderung der Zahl der an der Schwingung teilnehmenden Windungen und durch Verwendung von Überlastungen kann man das Intervall zwischen den Unterbrechungen innerhalb weiter Grenzen verändern. Man verstärkt die Anziehung zwischen den Windungen durch Einführen eines runden Stabes aus weichem Eisen in die Achse des Solenoids.

Einige Zutaten verwandeln den Unterbrecher ohne Schwierigkeiten in ein Phosphoroskop. Man braucht nur den geradlinigen Teil der Spirale mit einem kleinen rechteckigen undurchsichtigen Schirm zu versehen, dann kann man leicht dessen Stellung so regulieren, daß er den phosphoreszierenden Körper verdeckt, wenn der erregende Funke vor diesem Körper übergeht, und ihn unmittelbar darnach freigibt. Dann wird das Auge nur das Licht empfangen, das der Körper bei der Phosphoreszenz aussendet.

Die nebenstehende Skizze gibt eine genügend klare Vorstellung von der Anordnung. C ist der zu untersuchende Körper, E, E sind die Pole der Funkenstrecke, F ist der Stab aus weichem Eisen, I der Unterbrecher, S der mit dem Unterbrecher fest verbundene Schirm, H der große Schirm zum Schutze des Auges gegen das direkte Licht des Funkens. Dieser letztgenannte Schirm hat bei O eine Öffnung, die

der Größe des beweglichen Schirmes S entspricht. Man kann vorteilhaft diese Öffnung an der Wand eines Pappkastens anbringen, die den ganzen Apparat umschließt. Schließlich kann es von Nutzen sein, den Gang des beweglichen Endes des Unterbrechers durch eine Führung zu leiten, die man aus einem Ende Metallrohr oder aus einer einfachen Metalldrahtöse G herstellt, wie es in der Skizze angedeutet ist.



Die Spirale, die ich benutzt habe, bestand aus gehärtetem Messingdraht von 2 mm Stärke. Sie besaß 69 Windungen auf einer Gesamtlänge von 16,5 cm mit einem mittleren Durchmesser von 19 mm. Der koaxiale Eisenstab hatte einen Durchmesser von 9 mm. Ein Ende Kupferdraht stellte den Kontakt mit dem Quecksilber her. Die Stromstärke erreichte einige Ampere, die Unterbrechungszahl ungefähr zwölf in der Sekunde.

Lausanne, im November 1910.

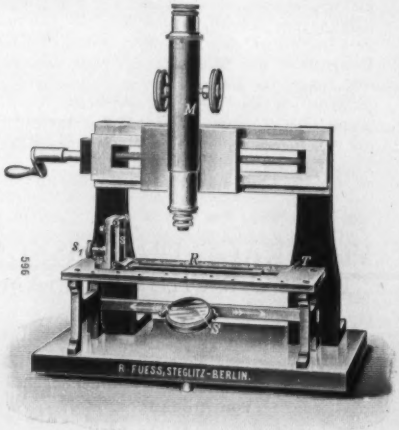
(Nach dem Manuskript aus dem Französischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 29. November 1910.)

Apparat zur Ausmessung von Spektren[1]).

Von C. Leiß.

Die Konstruktion dieses Apparates erfolgte auf Anregung des Herrn Prof. Dr. Goldstein (Berlin). Ein Hauptvorteil dieses Apparates gegenüber den bisher gebräuchlichen Ausführungsformen ist, daß man das Spektrophotogramm und Meßskala gleichzeitig im Beobachtungsmikroskop erblickt, das Auge sich also nicht nach jeder Einstellung von neuem behufs Ablesung der Längen- und Trommelteilung akkommodieren muß. In dieser Hinsicht gestaltet sich das Arbeiten mit dem neuen Apparat nicht nur wesentlich einfacher, sondern auch



weit weniger anstrengend. Der Apparat gestattet die Ablesung von 0,01 Millimeter.

Auf einer kräftigen eisernen Grundplatte erheben sich zwei Träger, an deren oberen Enden der Schraubenschlitten für die Bewegung des durch Zahn und Trieb einstellbaren Mikroskopes M befestigt ist. Die Schraube ist keine Meßschraube, sondern dient lediglich zur Fortbewegung des Mikroskopes M. Zur Messung dient eine 10 cm lange, in 0,1 mm auf Glas geteilte Skala, welche in den Messingrahmen R gefaßt ist. Dieser Rahmen mit der Glasskala ist, wie aus der Figur ersichtlich, an einem dreifachen Gelenk befestigt, welches bewirkt, daß die auf der unteren Seite des Glases befindliche Skala stets mit sanftem Druck auf der Schichtseite des Photogramms aufliegt; Parallaxe

1) Mitteilung aus der R. Fueßschen Werkstätte.

ist bei den Messungen demgemäß ausgeschlossen. Das vertikale Scharnierstück s liegt stets mit Federdruck gegen das verrundete Ende der Feinstellschraube s_1 an; dadurch ist es möglich, in bequemer Weise irgendeinen bestimmten Teilstrich der Skala, von dem man seine Messungen beginnen will, in Koinzidenz mit einer bestimmten Spektrallinie zu bringen.

Das auszumessende Spektrogramm wird bei hochgeklapptem Rahmen R auf die Tischplatte T aufgelegt und durch zwei Federklemmen, für die eine größere Anzahl Löcher zum Einstecken in T vorgesehen ist, befestigt. In gewissen Fällen empfiehlt es sich auch, das auszumessende Photogramm mit ein wenig Klebwachs auf dem Tische zu befestigen. Das Ausrichten des zu messenden Spektrums parallel der Bewegungsrichtung des Mikroskops geschieht mit Hilfe des letzteren derart, daß man durch entsprechendes Verschieben des Mikroskops M erst das eine und dann das andere Ende des Spektrophotogrammes in die Mitte des Sehfeldes von M bringt. Man muß also hierzu das Mikroskop mit Hilfe seines Schlittens von einem zum anderen Ende des Spektrums bewegen.

Die Vergrößerung des Mikroskopes ist etwa 20fach, wobei man etwa 4 mm der Glasskala übersieht.

Im Okular des Mikroskopes befindet sich ein Mikrometer von 10 Intervallen für die direkte Ablesung des 0,01 mm. Bei nur einiger Übung kann man indes sehr bequem ohne Zuhilfenahme des Okularmikrometers das 0,01 mm durch Schätzung bestimmen; da die Vergrößerung des Mikroskops eine 20fache ist, erscheint ein Intervall der Hauptskala dem Auge etwa 2 mm groß, und hiervon den zehnten Teil zu schätzen, fällt dem einigermaßen geübten Auge nicht schwer.

Der Tubus der Augenlinse des Okulars besitzt eine kurze Schneckenbewegung zur genauen Einstellung auf das Mikrometer.

Der mit den üblichen Drehbewegungen versehene Beleuchtungsspiegel S kann auf einer Schiene parallel der Bewegungsrichtung des Mikroskops verschoben und beim Nichtgebrauch leicht abgenommen werden. In den meisten Fällen, insbesondere beim Arbeiten mit Tageslicht, ist der Spiegel sogar entbehrlich; eine angenehme und meist ausreichende Beleuchtung erzielt man schon mit einem auf die Grundplatte gelegten weißen Papier.

(Eingegangen 17. November 1910.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN VON DER 82. NATURFORSCHERVERSAMMLUNG ZU KÖNIGSBERG.

Aus der gemeinsamen Sitzung beider Hauptgruppen:

Die Verwertung des Luftstickstoffs mit Hilfe des elektrischen Flammenbogens[1].

Von J. Zenneck.

I.

„Vor allem möchte ich Ihnen das Modell (Fig. 1)[2] einer Anlage zur künstlichen Darstellung von Salpeter, wie sie zum Beispiel in Notodden (Norwegen) im Betrieb ist, in Tätigkeit vorführen. Wir wollen die Luft auf ihrem Wege durch die Anlage verfolgen.

Der erste Apparat, in den die Luft, unser Rohmaterial, gelangt, ist ein Gebläse. In meiner Demonstrationsanlage hier ist es ein kleines elektrisch betriebenes Schmiedegebläse[3], in Wirklichkeit ist es ein mächtiger Turbokompressor, der 20000 Kubikmeter Luft pro Stunde der Anlage zuführt.

Sie kommt dort sofort in den „Ofen" (Fig. 1), in dem der elektrische Flammenbogen brennt. Der Bau dieses Ofens soll später näher beschrieben werden, sein Zweck ist der, den Stickstoff und Sauerstoff, die in der Luft als Gemenge nebeneinander vorhanden sind, wenigstens zum Teil zur Vereinigung zu zwingen. Das Produkt dieser Vereinigung im elektrischen Flammenbogen ist das Stickoxyd (NO), ein, wie Sie durch das Glasrohr (A Fig. 1) sehen, farbloses Gas.

Das nächste Stadium ist die Abkühlung der Gase. Die nitrosen Gase, d. h. die Luft mit dem im Ofen gebildeten Stickoxyd, verlassen den Ofen mit sehr hoher Temperatur, bei den technischen Anlagen 800—1000°. Um die in ihnen aufgespeicherte Wärmemenge auszunützen und den nächsten Prozeß zu erleichtern, leitet man sie durch einen Dampfkessel. In meinem Modell sollen die Kupferröhren in dem Wassertrog (B Fig. 1) den Dampfkessel andeuten, in Wirklichkeit sieht er aus wie eben

1) Auszug aus dem Vortrag bei der Naturforscherversammlung in Königsberg. Ein vollständiger Abdruck des Vortrags erscheint bei S. Hirzel (Leipzig).

2) Die Figuren befinden sich auf den Tafeln XXXIII bis XXXVI.

3) Keith-Blackman-Schmiedegebläse der Firma Blackman Export Co., 70 Finsbury Pavement, London E. C. Diese elektrisch betriebenen Gebläse sind auch für andere physikalische Versuche (Akustik, Aerodynamik, Ventilieren von überlasteten Widerständen), bei denen sehr große Luftmengen gefördert werden sollen, sehr geeignet. Preis mit Vorschaltwiderstand ca. 200 M.

jeder große Dampfkessel. Der in ihm produzierte Dampf wird zum Heizen und Eindampfen benützt.

Nachdem die Gase gehörig abgekühlt sind, wird ihnen Gelegenheit gegeben, in einem großen Behälter, der „Oxydationskammer", die auch in den technischen Anlagen, nicht nur in meinem Modell (*C* Fig. 1), durch einen großen Zylinder[1]) gebildet wird, sich etwas auszuruhen. Sie sehen, daß sich in diesem Zylinder das Bild der nitrosen Gase vollkommen geändert hat, und werden schon vermuten, daß die braungelbe Farbe nicht nur eine Folge der Abkühlung war, sondern auf eine chemische Umwandlung hindeutet. Eine solche ist tatsächlich vor sich gegangen. Das Stickoxyd, das im Ofen sich gebildet hat, hat sich mit dem Sauerstoff derjenigen Luft, die den Ofen unverändert passiert hat, zu Stickstoffdioxyd NO_2 vereinigt.

Im nächsten Stadium kommen die nitrosen Gase in Berührung mit Wasser, bei meinem Modell in dem mit Koks gefüllten Glaszylinder (*D* Fig. 1), der mit Wasser berieselt ist. Hier wird das Stickstoffdioxyd vom Wasser unter Bildung von Salpetersäure absorbiert. Daß es eine Säure ist, die aus dem Glaszylinder unten heraus läuft, kann ich Ihnen zeigen, indem ich ein Glas davon in einen Zylinder mit einer leicht alkalischen und deshalb rötlich gefärbten Phenolpthaleïnlösung gieße: es tritt sofort Entfärbung ein, eine bekannte Reaktion auf Säure.

Durch die Wahl eines recht großen Glaszylinders habe ich schon andeuten wollen, daß es sich hier um einen sehr voluminösen Teil der ganzen Anlage handelt. In Notodden z. B. sind es mächtige Granittürme, in denen die Absorption zu Salpetersäure vor sich geht[2]).

Ich sagte Ihnen, daß in den Absorptionstürmen Salpetersäure entsteht. Von der Salpetersäure bis zum Salpeter ist nur noch ein Schritt: man braucht nur die Salpetersäure über Kalksteine laufen zu lassen, es entsteht dann als Produkt der Einwirkung und als Endprodukt des ganzen Prozesses Kalksalpeter, von dem Sie hier eine Probe sehen. Er kommt als Norge-Salpeter in den Handel, und eingehende Düngeversuche haben gezeigt, daß er bei demselben Stickstoffgehalt dem natürlichen Chile-Salpeter an Düngwirkung nicht nachsteht, diesem sogar für manche Bodenarten vorzuziehen ist.

1) Große Glaszylinder sind z. B. von Möller, Jungwirth & Co., Ilmenau zu beziehen. Besser als die von mir benützten würden für manche Zwecke, z. B. Versuch Fig. 15, wahrscheinlich Zylinder ohne verstärkten Rand sein.

2) Außerdem ist meist noch ein Turm vorhanden, in den die Gase nach Passieren der Granittürme gelangen und der mit Sodalösung beschickt wird. Er soll den Rest der nitrosen Gase vollständiger absorbieren, als es durch Wasser möglich ist, und liefert als Produkt Natriumnitrit, das in der chemischen Technik Verwendung findet.

II.

Die Vorgänge, die ich Ihnen eben schilderte, sind alle längst bekannte Dinge mit einer Ausnahme: dem Vorgang im Ofen. Diesen interessantesten Teil der ganzen Anlage wollen wir uns jetzt näher ansehen.

Alle die verschiedenen Ofentypen haben das Gemeinsame, daß in ihnen die Luft der Einwirkung eines elektrischen Lichtbogens ausgesetzt wird. In jedem Lichtbogen, der in Luft brennt, kommt auch tatsächlich eine Vereinigung von Stickstoff und Sauerstoff zu Stickoxyd zustande.

Sie sehen z. B. hier (Fig. 2) einen Lichtbogen einfachster Art, der zwischen 2 Effekt-Bogenlampenkohlen, die an die Lichtleitung angeschlossen sind, übergeht. Die Gase, die von dem Lichtbogen aufsteigen, werden durch Wasser, das mit Phenolpthaleïnlösung rötlich gefärbt ist, hindurchgesaugt: die Lösung wird fast sofort entfärbt, wenn ich den Lichtbogen in Betrieb setze, ein Zeichen, daß hier eine Säure, tatsächlich Salpetersäure, entstanden ist.

Dieser Ofen hier besitzt aber nicht die Eigenschaften eines technischen Ofens.

Was man beim technischen Ofen verlangen muß, ist, daß er die elektrische Energie, die man ihm zuführt, in möglichst günstiger Weise zur Stickoxyd-Darstellung verwendet: er ist also um so besser, je größer die Ofenausbeute, d. h. die Menge Stickoxyd ist, die er pro Kilowattstunde liefert.

Das ist aber nur die eine Bedingung. Das Produkt, das man verkaufen will, ist nicht das vom Ofen produzierte Stickoxyd, sondern der Kalksalpeter, d. h. schließlich die von den Absorptionstürmen absorbierte Menge nitroser Gase. Diese wird aber bei einer bestimmten Anzahl und Größe der Türme um so größer, je größer die Menge Stickoxyd pro Liter Luft, d. h. je höher die Konzentration der nitrosen Gase ist.

Was man also möchte, ist: 1. möglichst große Ofenausbeute, und außerdem 2. möglichst hohe Konzentration.

Wie man aber einen Ofen bauen muß, damit er diese beiden Bedingungen in der allerbesten Weise erfüllt, darüber kann man zurzeit nichts Allgemeines sagen[1]). Man kennt

1) Die Literatur über prinzipielle Fragen bei der Stickoxydbildung ist zusammengestellt bei E. Donath und K. Frenzel, die technische Ausnutzung des atmosphärischen Stickstoffs (Leipzig-Wien 1907), S. 49 und bei F. Haber und A. Koenig, Zeitschrift für Elektrochemie **16**, 11, 1910.

die chemischen Eigenschaften dieser elektrischen Entladungen vorerst noch zu wenig. Etwas, was man sicher weiß, ist recht unangenehm: der elektrische Flammenbogen hat nicht nur die Eigenschaft, Stickstoff und Sauerstoff zu Stickoxyd zu vereinigen, sondern auch die, das Stickoxyd zu Stickstoff und Sauerstoff zu zersetzen. Man sieht das, wenn man reines Stickoxyd statt Luft dem Ofen zuführt: was auf der anderen Seite herauskommt, ist nicht Stickoxyd, sondern ein Gemisch von Stickoxyd, Sauerstoff und Stickstoff. Man hat also die Aufgabe, diese Rückzersetzung möglichst zu verhindern, aber über die Mittel zur besten Lösung dieser Aufgabe läßt sich ebenfalls zurzeit nichts Allgemeines angeben.

Es schwebt vorerst noch ziemliches Dunkel über den intimeren Vorgängen bei der Stickoxydbildung in elektrischen Entladungen. Ich muß es mir deshalb versagen, auf diese für den Physiker interessanteste allgemeine Seite der Sache einzugehen.

III.

Statt dessen möchte ich Ihnen einige spezielle Ofentypen im Modell vorführen, von denen ich weiß, daß sie technische Verwendung gefunden haben.

Am nächsten an den Versuch Fig. 2 schließt sich eine Anordnung an, die von den Ingenieuren Pauling ausgebildet worden ist.

Der Apparat Fig. 2 leidet hauptsächlich an dem Mangel, daß viel zu wenig Luft mit dem Lichtbogen in Berührung kommt; und sucht man das dadurch zu verbessern, daß man durch ein Gebläse kräftig Luft gegen den Bogen bläst, so geht er sofort aus. Um diesem Übelstand zu begegnen, haben die Ingenieure Pauling den Elektroden die Form eines Hörnerblitzableiters gegeben, wie solche zum Schutz von Fernleitungen vielfach im Gebrauch sind.

Wenn ich die Elektroden dieses Hörnerblitzableiters hier (Fig. 3) mit den beiden Polen eines Hochspannungstransformators[1]) verbinde und denselben ohne Gebläse in Betrieb setze, so entsteht zwischen den Elektroden ein Flammenbogen wie bei dem Versuch Fig. 2. Wenn nun gegen diesen Flammenbogen ein kräftiger Luftstrom geblasen wird, so wird der Flammenbogen an den Elektroden hochgeführt, er reißt schließlich wohl auch ab, aber er zündet immer von neuem an der engsten Stelle zwischen den Elektroden. Hier ist es also möglich, viel größere Luftmengen mit dem Lichtbogen in Berührung zu bringen, als bei der Anordnung Fig. 2.

Bei den technischen Öfen[1]) nach diesem Prinzip, die von der Salpetersäure-Industriegesellschaft Gelsenkirchen verwendet werden, sind, wie es scheint, zwei solcher Flammenbogen in einer gemeinsamen Kammer hintereinander geschaltet, und es wird außer der Luft, die den Hörnerblitzableiter passiert, noch besondere Luft seitlich eingeblasen.

Das Modell der zweiten Anordnung, derjenigen von Birkeland-Eyde, sehen Sie hier (Fig. 4) aufgebaut: 2 horizontale Elektroden[2]) wie bei dem Versuch Fig. 2, aber mit einer sehr wichtigen Änderung: die beiden Elektroden und damit der Flammenbogen im Feld eines Elektromagneten[3]). So lange ich den Magneten nicht

1) Diese und die folgenden Versuche wurden gemacht mit einer Wechselstrommaschine und einem Transformator von 20 KW. Sekundärspannung bei Leerlauf 6000 Volt, Spannung am Bogen 2000 bis 3000 Volt, sekundärer Strom ca. 5 Amp.; im Sekundärkreis Drosselspule (Elektromagnetspule vgl. unten) von ca. 0,07 Henry. — Die Versuche Fig. 3, 4 und 12 lassen sich auch mit größerem Funkeninduktor und Wehneltunterbrecher in genügend effektvoller Weise machen; die Birkelandsche Scheibe bekommt aber dann natürlich zwei sehr ungleiche Hälften.

1) Vgl. F. Ruß, Zeitschr. f. Elektroch. 15, 544, 1909 und D. R. P. 216090 (1908).

2) Bequeme Elektrodenhalter für Hochspannungs- und Lichtbogenversuche sind die in Fig. 5a und b abgebildeten. Die Porzellankörper sind z. B. von Schomburg & Söhne A.-G., Porzellanfabrik, Roßlau (Anhalt) zum Preis von ca. 30 Pf. zu beziehen.

3) Der Elektromagnet war genau demjenigen nachgebildet, den ich vor ca. 3 Jahren für das Braunschweiger Institut habe bauen lassen. Die Absicht dabei war weniger, extrem starke Felder in extrem kleinen Räumen, als die, mäßig starke Felder in verhältnismäßig großen Räumen und möglichst vielseitige Verwendbarkeit zu erreichen. Außerdem sollten die Kosten möglichst gering sein.

Der Kern (Fig. 6a und b), sog. Dynamoguß, mit 3 Paar Polnasen und Befestigungsschrauben (Fig. 7, 8, 9) wurde von der Firma Otto Gruson, Magdeburg zum Preis von ca. 325 M. in vorzüglicher Weise ausgeführt.

Für die Bemessung der Wicklung sind natürlich in erster Linie die vorhandenen Mittel maßgebend. Für alle Fälle empfehle ich die Wicklung jedes Magnetschenkels in mindestens zwei Spulen zu unterteilen, die einzelnen Windungslagen durch Ölpapier von einander zu isolieren (für die Wicklung genügt doppelt mit Baumwolle umsponnener Draht) und die Spulenkasten so zu bauen, daß in ihnen keine erheblichen Wirbelströme induziert werden können (z. B. Stirnflächen aus dreifach geleimtem Holz, die zylindrischen Innenflächen aus der Länge nach aufgeschlitztem Blech). Dann sind die Spulen für sehr viele Wechselstromversuche verwendbar: zur Herstellung ausgedehnter Wechselfelder, als Drosselspulen, zusammen mit Papier-(Telephon-)Kondensatoren und einer Braunschen Röhre zur Demonstration der Schwingungen von einfachen und gekoppelten Kondensatorkreisen.

Bei dem hier befindlichen Magneten besitzt jede Spule ca. 1690 Windungen aus Kupferdraht von 2,5 mm Durchmesser. Bei 18 Amp. Strom betragen die Feldstärken:

Polnase	Abstand	Feldstärke
keine	15 mm	16000 C.G.S.
keine	6 „	25000 „
Fig. 7	15 „	22000 „
Fig. 7	6 „	27500 „
Fig. 7	2 „	31000 „
Fig. 8	6 „	26000 „
Fig. 8	2 „	35600 „

Bei 5 Amp. sind die Feldstärken um ca. 10 Proz. kleiner.

erregt, sehen Sie genau dasselbe wie bei Versuch Fig. 2. Aber sobald der Erregerstrom eingeschaltet wird, ändert sich das Bild: Der Bogen scheint in die Form einer Scheibe — man nennt sie die Birkelandsche Scheibe — verbreitert zu sein (Fig. 4). Tatsächlich handelt es sich bei dieser Scheibe nicht um eine eigentliche Verbreiterung des Flammenbogens, sondern um eine Bewegung desselben. Der Bogen geht zuerst an der engsten Stelle zwischen den Elektroden über, und wird dann durch die Wirkung des Elektromagneten nach außen getrieben[1]), und zwar bei der einen Stromrichtung — man verwendet Wechselstrom — nach oben, bei der anderen nach unten. Da der Richtungswechsel ca. 100 mal pro Sekunde eintritt, so kann das Auge der Bewegung nicht folgen und erhält das Bild der leuchtenden Scheibe.

Die ungefähre Anordnung der technischen Öfen[2]) zeigt die schematische Fig. 10. Die Flammenbogenscheibe ist in eine dosenförmige Kammer von feuerfesten Steinen eingeschlossen; durch Bohrungen in diesen Steinen wird die Luft dem Bogen zugeführt, während die Ableitung der nitrosen Gase an der Peripherie erfolgt.

Die Öfen von Birkeland-Eyde haben sich auch technisch bewährt; ein besonderer Vorzug ist ihre verhältnismäßig einfache Konstruktion und die Möglichkeit in relativ kleinem Raume große Energiemengen zur Verwendung zu bringen. Sie werden für alle Zeiten in der Geschichte der Technik eine hervorragende Stelle einnehmen: stellen sie doch die erste erfolgreiche Lösung des Problems, den Stickstoff der Luft nutzbar zu machen, dar.

Der Erfindungsgedanke von Birkeland-Eyde, durch die Luft einen Flammenbogen mit Hilfe eines Magnetfelds durchzujagen, so daß ein bestimmtes Luftteilchen nur momentan von dem Flammenbogen getroffen wird, kommt auch bei einer Anordnung zur Verwendung, die zuerst von dem Schweden Petersson[3]) angegeben, dann in Deutschland von Brion[4]) und in der Schweiz von Moscicki[5]) verwendet wurde. Das Modell eines solchen Ofens sehen Sie hier (Fig. 11)[6]). Von den beiden Elektroden ist die eine stabförmig, die andere ein koaxialer Zylinder. Beide Elektroden befinden sich in einem magnetischen Feld, dessen Kraftlinien ungefähr in der Richtung der Achse der beiden Elektroden verlaufen. Zündet man den Bogen zwischen den beiden Elektroden, so wird derselbe auch hier durch das Magnetfeld in rasche Bewegung, in vorliegendem Fall zur Rotation gebracht, und zwar so rasch, daß die ganze Fläche, die er beschreibt, leuchtend erscheint (Fig. 11).

Moscicki im Verein mit der Aluminium-Industrie-Gesellschaft in Neuhausen hat diesen Ofen technisch ausgebildet in der Weise, wie es Fig. 12 zeigt. Während bei dem Versuch Fig. 6 das magnetische Feld durch den Strom in einer einfachen Spule hervorgerufen wurde, hat er die Elektroden wie beim Ofen von Birkeland-Eyde zwischen die Pole eines richtigen Elektromagneten gebracht. Außerdem läßt er, um eine möglichst rasche Abkühlung der Gase zu erreichen, dieselben unmittelbar, nachdem sie die Flammenkammer verlassen haben, einen Röhrenkühler passieren (*b* Fig. 7), der ähnlich wie ein Flammrohrkessel gestaltet ist.

Ich wende mich schließlich zu dem Ofentyp, den Sie schon bei dem Versuch (Fig. 1) am Anfang in Arbeit sahen, demjenigen der Badischen Anilin- & Soda-Fabrik. In einem Rohr (Fig. 13), dessen Länge sich hauptsächlich nach der Spannung richtet, ist bei diesem Ofen ein im wesentlichen längs der Rohrachse verlaufender stationärer Lichtbogen vorhanden. Die Luft, die der Wirkung des Lichtbogens ausgesetzt werden soll, wird bei einer speziellen Ausführungsform der Erfindung auf der einen Seite tangential eingeführt, so daß sich im Rohr ein Luftwirbel bildet, ähnlich wie an dem großen Glaszylinder hier, in dem ich den Wirbel durch eine große Gasflamme sichtbar gemacht habe[1]) (Fig. 15a Zeitaufnahme, Fig. 15b Momentaufnahme).

Vom Standpunkt des experimentellen Physikers aus ist diese Anordnung ganz besonders hübsch. Es imponiert schon, daß man hier mit verhältnismäßig einfachen Mitteln[2]) einen

1) Welche Form dabei der Bogen annimmt, hängt ganz von den Versuchsbedingungen ab.

2) Vgl. z. B.: K. Birkeland, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **3**, 264, 1906. F. Foerster, Zeitschr. f. Elektroch. **12**, 533, 1906; Donath u. Frenzel, l. c. S. 132.

3) A. J. Petersson, Schwed. Patent Nr. 21891 (1905). D. R. P. 183041 (1905).

4) G. Brion, diese Zeitschr. **8**, 792, 1907; Zeitschr. f. Elektroch. **13**, 761, 1907.

5) J. Moscicki, E. T. Z. **28**, 1003, 1032, 1055, 1907; Schweiz. Patent Nr. 45638 (1908), D. R. P. 209959 (1907).

6) Bei dem Versuch war die innere Elektrode eine Messingröhre von ca. 20 mm mit einem Endscheibchen von 50 mm Durchmesser, die äußere Elektrode ein Kupferzylinder von 180 mm Durchmesser. Die Spule, in deren Innenraum sich die Elektroden befanden, hatte einen inneren Durchmesser von 240 mm, einen äußeren von 420 mm und eine Höhe von 70 mm; Windungszahl = 535.

1) Die Anordnung des Versuchs ist aus Fig. 14 ersichtlich.

2) Das Modell, mit dem ich den Versuch machte, ist für Dauerbetrieb mit Wasserkühlung der Elektroden eingerichtet und deshalb verhältnismäßig kompliziert. Für kurz dauernde Demonstrationsversuche genügt eine Anordnung wie diejenige von Fig. 16. (Metallband in der Richtung des Luftwirbels!)

stabilen Lichtbogen von einer im Verhältnis zur Spannung ganz ungewöhnlichen Länge (Fig. 13) herstellen kann — die Flammen in den technischen Öfen haben sogar eine Länge von ca. 8 m bei einer effektiven Spannung von nicht über 4000 Volt —. Und Sie sehen, wie ruhig er trotz seiner Länge brennt, während sonst ein langer Lichtbogen eine äußerst labile Erscheinung ist, die bei jedem Luftzug ausgeht.

Physikalisch interessant sind ferner die eigentümlichen Druck- und Strömungsverhältnisse in einem solchen Luftwirbel: in der Achse des Wirbels z. B. herrscht ein Druck noch ziemlich unter Atmosphärendruck, wie man durch ein in das Innere eingeführtes Glasrohr, das mit einem Manometer in Verbindung steht, unmittelbar zeigen kann. Hand in Hand damit geht eine eigentümliche Temperaturverteilung im Ofen. Ein solcher Wirbel stellt bis zu einem gewissen Grade eine Zentrifuge dar: die Luft wird um so mehr nach außen gedrängt, je schwerer und demnach je kälter sie ist. Die Folge ist, daß der außerordentlich heiße innere Kern von einem Mantel von relativ kalter Luft umgeben ist. Diesem Umstand ist es zuzuschreiben, daß ich Ihnen den Versuch, für den mehr als 10 Pferdestärken in Wärme umgesetzt werden, in einem Glasrohr vorführen kann. Diesem Umstand ist es auch zu danken, daß man bei den technischen Öfen den Flammenbogen trotz seiner enorm hohen Temperatur in einem verhältnismäßig engen Rohr brennen lassen und dieses Rohr aus Eisen herstellen kann, ohne Gefahr zu laufen, daß es durchbrennt.

Aber nicht nur vom experimentellen, sondern auch vom theoretischen Standpunkt aus verdient dieser Ofen besondere Aufmerksamkeit. Bei den früheren Öfen war immer dafür gesorgt, daß die Luft möglichst kurz vom Lichtbogen durchsetzt wurde und möglichst rasch mit Frischluft oder einer kühlen Oberfläche in Berührung kam. Zu dieser Bedingung gelangt man auch, wenn man den Vorgang im Bogen einfach so betrachtet, als ob Luft in einem Gefäß z. B. durch Heizung von außen erhitzt und nachher abgekühlt würde. Für diesen Fall führt die Thermodynamik zu der Bedingung: die Luft muß auf möglichst hohe Temperatur erhitzt und dann möglichst plötzlich abgekühlt werden. Für diese Bedingung scheint es zum mindesten, als ob der Ofen recht ungeschickt konstruiert ist.

Die technischen Öfen[1]) unterscheiden sich von dem Modell hier hauptsächlich in zwei Richtungen: einmal ist das Rohr, in welchem der Flammenbogen brennt, wie ich schon sagte, aus Eisen. Und dann besitzt der Ofen Vorwärmung: die Luft, die dem Ofen zugeführt wird, wird durch die im Flammenbogen erhitzten Gase selbst erwärmt. In welcher Weise das geschieht, ist aus dem schematischen Durchschnitt durch den Ofen Fig. 17 ohne weiteres ersichtlich.

Besonders hübsch ist bei diesen Öfen die Aufgabe der Zündung gelöst worden. Sie wissen, daß man eine gewöhnliche Bogenlampe zündet, indem man die beiden Elektroden zur Berührung bringt und sie dann auseinander zieht. Hier ist das natürlich nicht möglich. Aber die Zündung ist noch einfacher. Durch ein Zündloch unten am Ofen steckt man ein Holzstäbchen, das mit einem Drähtchen umwickelt ist, in den Ofen hinein, stellt dadurch für einen Augenblick zwischen der unteren Elektrode und der Rohrwand eine leitende Verbindung her. Es bildet sich ein Flammenbogen, der durch den Luftwirbel nach oben geführt wird in seine richtige Lage. Das Zünden eines 1000pferdigen Ofens ist auf diese Weise so einfach wie das Zünden einer Stearinkerze. Ich kann Ihnen den Versuch an dem Modellofen hier zeigen; die Glasröhre ist oben für diesen Versuch mit einem spiraligen Metallband belegt, an dem der Bogen bei der Zündung hochklettert[1]). (Vgl. die Momentaufnahme Fig. 18, die den Bogen während des Hochkletterns darstellt.)

IV.

Bis jetzt habe ich Ihnen noch nichts mitgeteilt über den elektrischen Teil einer Luftsalpeter-Anlage.

In der Kraftstation wird das Wasser eines Stausees durch mehr oder weniger lange Rohrleitungen den Turbinen zugeführt, mit denen die großen Drehstrommaschinen direkt gekoppelt sind. An ihre drei Pole sind die drei Stränge der Fernleitung angeschlossen (Fig. 19). Ein weiterer dünnerer Strang verbindet den sogenannten Knotenpunkt der Maschine mit der Erde in der Fabrik. An die drei Hauptstränge sind in der Fabrik die Öfen, deren eine Elektrode geerdet ist, nicht direkt, sondern unter Vermittlung von Drosselspulen angeschaltet.

Aber so einfach diese Verhältnisse aussehen, so boten sie doch des Neuen genug in elektrischer und elektrotechnischer Beziehung.

Schon daß man die Öfen nicht direkt, wie

1) Näheres über dieselben bei R. Schoenherr (Ztschr. f. ang. Chemie 21, 1633, 1908; ETZ. 30, 365, 367, 1909). A. Bernthsen, Ztschr. f. ang. Chemie 22, 1167, 1909.

1) Nachdem für einen Moment zwischen diesem Metallband, das mit der oberen Elektrode in leitender Verbindung steht, und der unteren Elektrode durch einen seitlich eingeführten Metallstift Kurzschluß gemacht wurde.

etwa einen Motor oder Glühlampen, an die Leitungen anlegen kann, ist etwas ungewöhnlich, aber durchaus notwendig. Würde man es nicht tun, so würde wegen der elektrischen Eigentümlichkeiten des Bogens entweder der Bogen ausgehen oder die Maschine durchbrennen, bezw. die Automaten, welche die Maschine dagegen sichern sollen, herausfliegen. Ähnliches ist ja schon von den gewöhnlichen Bogenlampen her bekannt; man benützt auch für diese bei Wechselstrom vielfach Drosselspulen. Aber die Größe der für die Öfen verwendeten Drosselspulen übersteigt alles, was man sonst gewöhnt ist, um das Vielfache.

Diese Drosselspulen haben denselben Zweck wie ein Vorschaltwiderstand, unterscheiden sich von diesem aber in einem wichtigen Punkt. Sie verbrauchen, wenn sie gut gebaut sind, nur äußerst wenig Energie, so wenig, daß es sehr schwer ist, den Energieverbrauch einer solchen Spule einigermaßen genau zu messen[1]). Es mußte dazu ein besonderes Meßinstrument gebaut werden, da weder gewisse Laboratoriumsanordnungen noch die gewöhnlichen technischen Wattmeter dafür brauchbar waren.

Neu ist bis zu einem gewissen Grade, daß man hier unmittelbar mit Hochspannung arbeitet. Gewöhnlich wird ja die Hochspannung nur zur Fernübertragung benutzt und in der Fabrik auf niedere Spannung herabtransformiert. Hier treten (Fig. 19) die Hochspannungsleitungen bis an die Elektroden heran, noch unmittelbar an der Ofenelektrode herrscht eine Spannung von mehreren Tausend Volt. Welche furchtbare Gefahr darin liegt und welche Vorsichtsmaßregeln dies bedingt, ist Ihnen bekannt.

Neu ist es, daß man in Anlagen von so großer Energie ein Element von verhältnismäßig so geringer Konstanz hat, wie es schließlich ja jeder Lichtbogen darstellt. Es treten hier, wohl hauptsächlich infolge kleiner Unregelmäßigkeiten an den Elektroden, oft ziemlich plötzliche Strom- und Spannungsschwankungen auf. Die Elektrotechniker unter Ihnen wissen, daß man damit in das Gebiet der praktisch und theoretisch gleich unangenehmen Überspannungen kommt. Die Öfen der B.A.S.F. sind in dieser Beziehung zweifellos besonders günstig: bei ihrer großen Länge sind kleine Unregelmäßigkeiten an den Elektroden von geringem Einfluß auf die Gesamtverhältnisse. Aber auch hier hat man, so selten es vorkommt, damit zu rechnen, daß einmal ein Ofen ausgeht, daß also der Generator plötzlich um mindestens tausend Pferdestärken entlastet wird. Ebenso tritt beim Einschalten aller derartiger Öfen die Belastung plötzlich auf. Anlaßvorrichtungen wie etwa bei Motoren sind nur in beschränktem Maße möglich und nur bei ganz großen Öfen üblich: man verwendet mehrere parallele Drosselspulen und schaltet diese der Reihe nach ein.

Neu ist es ferner bis zu einem gewissen Grade, daß hier die Strom- und Spannungsverhältnisse an den Öfen ziemlich weit von dem abweichen, was man sonst in Wechselstromanlagen gewöhnt ist. Es treten hier die verschiedensten Komplikationen auf, deren systematische Untersuchung besonderen Reiz hatte. Im Zusammenhang mit diesen Komplikationen standen allerlei Überraschungen, die man im Anfang erlebte, ganz besonders auf dem Gebiet der Messungen. Es berührte eigentümlich, wenn z. B. die Angaben von zwei Präzisionsinstrumenten, die beide von der Physikalisch-technischen Reichsanstalt geeicht waren und unter gewöhnlichen Umständen auch vollkommen übereinstimmten, um 4 Proz. verschieden waren, oder wenn technische Meßinstrumente, die in Wechselstromkreisen gewöhnlicher Art auf 1 bis 2 Proz. genau sind, um 12 oder noch mehr Prozent falsch zeigten. Hier war für den Physiker ein interessantes Feld, interessant auch deshalb, weil die Bedingungen, unter denen man arbeitet, so ganz andere sind als im Laboratorium. Schon die Aufgabe, ein Meßinstrument in eine Leitung einzuschalten, ist hier keineswegs eine einfache Sache, wenn die Leitung 200 bis 300 Ampère Strom führt und einige Tausend Volt Spannung gegen Erde besitzt. Die hohe Spannung aller Leitungen allein erschwert das Experimentieren außerordentlich; jede Berührung ist für den Messenden tödlich, und auch den eingeschalteten Meßinstrumenten sind diese Spannungen äußerst unsympathisch. Sie zeigen Störungen und Abweichungen[1]), die erst erkannt werden mußten, ehe ein sicheres Messen möglich war.

Aber das sind alles Detailsorgen des Physikers, freilich deshalb doch von allgemeinerem Interesse, weil die praktisch fundamental wichtige Bestimmung der Ofenausbeute nur möglich ist, wenn man in der Lage ist, die elektrische Energie richtig zu messen. Da die in der Technik jedenfalls am meisten gebrauchten Meßmethoden hier versagen, so hat man alles Recht, den Angaben in der Literatur über die Ausbeute der verschiedenen Ofensysteme unbegrenztes Mißtrauen entgegen zu bringen, wenn nicht aus den Angaben klar hervorgeht, daß die elektrische Energie richtig gemessen wurde."

1) Da die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung hier sehr nahe bei 90° liegt.

1) Auch abgesehen von denjenigen, über die ich kürzlich (diese Zeitschr. 11, 896, 1910) berichtete.

(Eingegangen 12. November 1910.)

VORTRÄGE UND REDEN.

Alte und neue Fragen der Physik.

Von H. A. Lorentz[1]).

1. Vortrag.

Über die Entwicklung unserer Vorstellungen vom Äther.

Bei den älteren Physikern war über die Auffassung des Äthers kein Zweifel; er wurde als eine Art gewöhnlicher Materie angesehen, von dieser nur verschieden durch die Werte seiner physikalischen Konstanten, z. B. Elastizität und Dichte, und es galt als ausgemacht, daß sich alle Vorgänge in ihm nach den Gesetzen der Mechanik erklären lassen müßten. Ein Vertreter dieses Standpunktes ist Huygens, der die große Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes auf die Größe der elastischen Kräfte der Ätheratome zurückführt; Newton konnte sich das Eindringen der Wärmestrahlen in evakuierte Gefäße nur durch das Vorhandensein eines materiellen Mediums erklären. Auch Fresnel fußt noch ganz auf dieser Anschauung; durch seine Interferenzversuche mit polarisiertem Licht, welche die Transversalität der Lichtschwingungen bewiesen, wurde er aber gezwungen, die bis dahin anerkannte Vorstellung eines flüssigen Äthers (Fluidum-Theorie) durch die kühne Hypothese eines festen elastischen Äthers zu ersetzen. Die Frage nach der Existenz longitudinaler Schwingungen ist auch später noch aufgetaucht; Röntgen zog die Möglichkeit in Betracht, seine x-Strahlen auf diese Weise zu erklären, eine Vermutung, die nach den Geschwindigkeitsmessungen dieser Strahlen durch Marx und den Beobachtungen über ihre Polarisation und die der Sekundärstrahlen durch Barkla, Haga u. a. sich als unhaltbar erwiesen hat.

Auf die Entwicklung der Lehre vom mechanischen Lichtäther, an der Männer wie F. E. Neumann, Green, Cauchy, Kirchhoff u. a. hervorragenden Anteil hatten, geht der Redner nicht näher ein, sondern wendet sich zu der Lichttheorie von Mac Cullagh, die als Vorläuferin der elektromagnetischen Theorie anzusehen ist. Nach Mac Cullagh hängt die potentielle Energie U des Äthers nicht von den Verzerrungen, sondern von den Verdrehungen $\mathfrak{u}$ der Volumelemente des Äthers ab, die mit den Verschiebungen $\mathfrak{q}$ durch die Vektorformel

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{q}$$

zusammenhängen; es ist für ein kristallinisches Medium allgemein zu setzen (pro Volumeinheit):

$$U = \frac{1}{2}(k_{11}\mathfrak{u}_x^2 + \cdots + 2k_{12}\mathfrak{u}_x\mathfrak{u}_y + \cdots)$$

und für isotrope Körper:

$$U = \frac{1}{2} k \mathfrak{u}^2;$$

die kinetische Energie beträgt

$$T = \frac{1}{2} l \dot{\mathfrak{q}}^2,$$

wo l die Dichte bedeutet.

Mit der Aufstellung der elektromagnetischen Lichttheorie ist die Frage nach der Natur des Äthers in eine neue Phase getreten, da er jetzt nicht nur als Träger der schnellen Lichtwellen, sondern auch der statischen und langsam veränderlichen Felder erscheint. Die Grundgleichungen der Maxwellschen Theorie des reinen Äthers verknüpfen die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ mit der magnetischen $\mathfrak{H}$ folgendermaßen:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{E}},$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit).

Handelt es sich um die mechanische Erklärung der hierdurch dargestellten elektromagnetischen Erscheinungen überhaupt, so wird man diese Relationen etwa mit den Mac Cullaghschen in Beziehung zu bringen suchen. Aus den oben angegebenen Formeln von Mac Cullagh ergeben sich für den isotropen Äther mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips folgende Beziehungen:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathfrak{q}} = 2\dot{\mathfrak{u}},$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{u} = -\frac{2l}{k} \ddot{\mathfrak{q}},$$

$$\left(c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{l}} = \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit}\right).$$

Man kann diese mit den Maxwellschen Glei-

---

1) Vom 24. bis 29. Oktober d. J. hielt Herr Prof. H. A. Lorentz auf Veranlassung der Wolfskehlkommission in Göttingen einen Zyklus von 6 Vorlesungen. Eine große Zahl auswärtiger Mathematiker und Physiker war herbeigeeilt, um den durch ihren sachlichen wie persönlichen Gehalt in gleicher Weise fesselnden Vorträgen zu lauschen und sie in regem persönlichen Gedankenaustausch zu verarbeiten. Möchte das hier gegebene von Herrn M. Born in dankenswertester Weise erstattete, von Herrn H. A. Lorentz freundlichst durchgesehene Referat denen, die die Göttinger Lorentzwoche miterlebt haben, eine liebe Erinnerung bilden; und möchte es den übrigen Fachgenossen einen Begriff geben von der köstlichen physikalischen Höhenwanderung, die jene unter der Führung des Meisters unternehmen durften.

Die Herausgeber.

chungen auf zwei Arten zur Übereinstimmung bringen, indem man setzt (ν Konstante):

$$\mathfrak{H} = \nu \dot{\mathfrak{q}}, \qquad \mathfrak{E} = 2\nu c\, \mathfrak{u},$$

oder

$$\mathfrak{E} = \nu \dot{\mathfrak{q}}, \qquad \mathfrak{H} = -2\nu c\, \mathfrak{u}.$$

Diesen beiden Ansätzen entsprechen zwei mechanische Deutungen der elektromagnetischen Vorgänge: Man kann die elektrische Kraft als Geschwindigkeit einer Ätherströmung in der Richtung der Kraftlinien ansehen und die magnetische Kraft als Drehung der Volumelemente um die Kraftlinien (wo dann die elektrische Energie als kinetische, die magnetische als potentielle aufzufassen ist) — oder umgekehrt. Beide Bilder sind zulässig und gleichberechtigt, wenn es sich um ein Lichtbündel handelt, aber beide führen zu großen Schwierigkeiten, sobald man sie auf statische Zustände anzuwenden versucht. So erfordert z. B. in dem ersten Bilde die Beschreibung des elektrostatischen Feldes einer geladenen Kugel die Annahme, daß der Äther fortwährend aus der Kugel aus- oder in sie einströmt, entsteht oder verschwindet; in dem zweiten Bilde aber hat man in diesem einfachen Fall Rotationen der Volumelemente anzunehmen, die mathematisch unmöglich sind. Witte hat gezeigt, daß überhaupt jede mechanische Erklärung, in der man den Äther als ein Kontinuum voraussetzt, als ausgeschlossen zu betrachten ist. Allerdings ist eine solche Erklärung denkbar, wenn man den Äther aus diskreten Teilchen gebildet annimmt.

Von großer Bedeutung ist der Umstand, daß der Äther als vollkommen durchdringlich angesehen werden muß; denn es muß als erwiesen gelten, daß die Lichtfortpflanzung durch die Bewegung der Himmelskörper nicht merklich beeinflußt, also der Äther von ihnen nicht mitgeführt wird. Diese von Fresnel aufgestellte Hypothese des ruhenden Äthers bildet auch das Fundament der Elektronentheorie, wie sie von Wiechert, Larmor und Lorentz ausgebildet worden ist. Ihre Grundgleichungen lauten:

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \varrho,$$
$$\operatorname{div} \mathfrak{h} = 0,$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{h} = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{d}} + \varrho \mathfrak{v}),$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{d} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}};$$

hier bedeuten $\mathfrak{d}$ die dielektrische Verschiebung, $\mathfrak{h}$ die magnetische Kraft, ϱ die Ladungsdichte und $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Ladung; $\dot{\mathfrak{d}}$, der Maxwellsche Verschiebungsstrom, und $\varrho\mathfrak{v}$, der Konvektionsstrom, setzen den gesamten elektrischen Strom zusammen. Dazu kommt die Relation, welche die auf die Ladungen (Elektronen) ausgeübte mechanische Kraft angibt, und zwar ist diese für die Einheit der Ladung

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}].$$

Aus diesen Grundgleichungen läßt sich ein dem Hamiltonschen Prinzip sehr analoger Satz ableiten. Erteilt man nämlich den Ladungen virtuelle Verschiebungen und variiert gleichzeitig den Vektor $\mathfrak{d}$, derart, daß die erste Grundgleichung bestehen bleibt, so kommt man zu der Vorstellung eines variierten elektromagnetischen Vorganges, und es gilt, wenn man für diesen die magnetische Energie in sachgemäßer Weise bestimmt,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta(T - U) - \delta E)\, dt = 0,$$

wobei δT, δU die Variationen der magnetischen und elektrischen Energie, δE die virtuelle Arbeit der Feldkräfte bei der Verrückung der Ladungen bedeuten und alle Variationen zu den Zeiten t_1, t_2 verschwinden.

Diese Formel, die sich mit der entsprechenden der Mechanik noch besser in Einklang bringen läßt durch Einführung der Arbeit $\delta A = -\delta E$ der auf die Ladungen wirkenden äußeren Kräfte, die, wenn mit den Ladungen keine materielle Masse verbunden ist, den Feldkräften das Gleichgewicht halten müssen, legt den Versuch der Konstruktion mechanischer Modelle der elektromagnetischen Vorgänge sehr nahe. Man denke sich etwa den Äther als unbewegliches Gerüst und darin die (positive) Elektrizität als ein Fluidum, das aus zwei Teilen besteht. Der eine Teil ist an feste Gleichgewichtslagen durch „quasielastische" Kräfte gefesselt; die Verschiebungen aus den Gleichgewichtslagen werden durch den Vektor $\mathfrak{d}$ beschrieben und die elektrische Energie ist $\frac{1}{2}\mathfrak{d}^2$ pro Volumeinheit. Den zweiten Teil bilden die eigentlichen elektrischen Ladungen. Beide Teile zusammen konstituieren eine inkompressible Flüssigkeit; danach ist der durch die Bewegung des Fluidums gebildete elektrische Strom solenoidal verteilt. Um auch das magnetische Feld in dieses Bild einzubeziehen, kann man mit Maxwell die Drehungen um die magnetischen Kraftlinien durch kleine Räder (und Zwischenräder) realisiert denken; der kinetischen Energie der Räder entspricht dann die magnetische Energie $\frac{1}{2}\mathfrak{h}^2$, und die Rolle der Zwischenräder hat das genannte, aus diskreten Teilchen bestehende Fluidum zu übernehmen. Ein solches Modell genügt in der Tat jenen Grundgleichungen der Elektronentheorie, aber es bietet einem vollständigeren Verständnis der elektrischen Erscheinungen außerordentliche Schwierigkeiten. Schon die

Deutung der negativen Ladungen, noch viel mehr aber die Berücksichtigung der ponderablen Materie macht notwendigerweise das mechanische Modell äußerst verwickelt.

Diesem Tatbestande gegenüber sind zweierlei Standpunkte möglich. Entweder begnügt man sich mit dem Bewußtsein der prinzipiellen Möglichkeit der mechanischen Erklärbarkeit aller elektromagnetischen Vorgänge, ohne eine ins einzelne gehende Untersuchung anzustreben. Oder aber man verzichtet überhaupt auf jede mechanische Erklärung — eine Auffassung, zu der sich der Redner selbst bekennt. Dabei wird man wohl noch manche Ausdrucksweise der Mechanik beibehalten müssen, man redet ja von den auf die Elektronen wirkenden Kräften, aber der Äther hat Eigenschaften wie Dichte oder Elastizität völlig verloren. Wenn Lodge aus der Formel für die elektromagnetische Masse eines Elektrons (vom Radius R und der Ladung e)

$$m = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}$$

durch Division mit seinem Volumen, oder auf anderem ähnlichen Wege, die Dichte des Äthers berechnet (das Resultat ist ungefähr $5 \cdot 10^{10}$), so hat das von diesem Standpunkt aus ebensowenig Sinn wie die Kraftlinien J. J. Thomsons, die den Äther gleichsam greifen und mitführen. Dennoch behalten solche Veranschaulichungen und auch mechanische Analogien und Bilder, wie die von Bjerknes und Korn ersonnenen, in den Händen der Forscher den größten heuristischen Wert.

Hat es danach überhaupt noch einen Sinn, vom Äther zu reden? Schließlich ist ihm nur noch soviel Substantialität geblieben, daß man durch ihn ein Koordinatensystem festlegen kann.

Selbst dieser letzte Rest der Substantialität wird durch das Relativitätsprinzip angegriffen, von dem der nächste Vortrag handeln soll.

2. Vortrag.

Das Einsteinsche Relativitätsprinzip hier in Göttingen zu besprechen, wo Minkowski gewirkt hat, erscheint mir eine besonders willkommene Aufgabe.

Man kann die Bedeutung dieses Prinzips von verschiedenen Gesichtspunkten beleuchten. Von der mathematischen Seite der Frage, die durch Minkowski eine so glänzende Darstellung gefunden hat und von Abraham, Sommerfeld u. a. weiter ausgebaut worden ist, soll hier nicht die Rede sein. Vielmehr sollen nach einigen erkenntnistheoretischen Betrachtungen über die Begriffe von Raum und Zeit diejenigen physikalischen Erscheinungen erörtert werden, die zu einer experimentellen Prüfung des Prinzips beitragen könnten.

Das Relativitätsprinzip behauptet folgendes: Wenn eine physikalische Erscheinung im Bezugssystem x, y, z, t durch gewisse Gleichungen beschrieben wird, so wird es auch eine Erscheinung geben, die sich in einem andern Bezugssystem x', y', z', t' durch dieselben Gleichungen beschreiben läßt. Dabei hängen beide Bezugssysteme durch Beziehungen zusammen, in denen die Lichtgeschwindigkeit c vorkommt und die ausdrücken, daß das eine System sich relativ zum andern mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt.

Befindet sich der Beobachter A in dem ersten, B in dem zweiten Bezugssystem, und verfügt jeder über Maßstäbe und Uhren, die in seinem System ruhen, so wird A die Werte von x, y, z, t, B aber die Werte von x', y', z', t' messen, wobei zu bemerken ist, daß A und B sich auch ein und desselben Maßstabs und ein und derselben Uhr bedienen können. Wir müssen annehmen, daß, wenn Maßstab und Uhr von dem ersten Beobachter irgendwie dem zweiten in die Hände gespielt werden, sie dabei von selbst die richtige Länge bezw. den richtigen Gang annehmen, derart, daß B aus seinen Messungen die Werte von x', y', z', t' herausbekommt. Beide werden nun für die Lichtgeschwindigkeit den gleichen Wert finden und überhaupt die gleichen Beobachtungen machen können.

Gesetzt, es gäbe einen Äther; dann wäre unter allen Systemen x, y, z, t eines dadurch ausgezeichnet, daß die Koordinatenachsen, sowie die Uhr im Äther ruhen. Verbindet man hiermit die Vorstellung (die auch Redner nur ungern aufgeben würde), daß Raum und Zeit etwas völlig Verschiedenes seien und daß es eine „wahre Zeit" gebe (die Gleichzeitigkeit würde dann unabhängig vom Orte bestehen, entsprechend dem Umstande, daß uns die Vorstellung unendlich großer Geschwindigkeiten möglich ist), so sieht man leicht, daß diese wahre Zeit eben von Uhren, die im Äther ruhen, angezeigt werden müßte. Wenn nun das Relativitätsprinzip in der Natur allgemeine Gültigkeit hätte, so würde man allerdings nicht in der Lage sein, festzustellen, ob das grade benützte Bezugssystem jenes ausgezeichnete ist. Man kommt also dann zu denselben Resultaten, wie wenn man im Anschluß an Einstein und Minkowski die Existenz des Äthers und der wahren Zeit leugnet und alle Bezugssysteme als gleichwertig ansieht. Welcher der beiden Denkweisen man sich anschließen mag, bleibt wohl dem einzelnen überlassen.

Um die physikalische Seite der Frage zu diskutieren, müssen wir zunächst die Transformationsformeln aufstellen, wobei wir uns auf eine spezielle Form beschränken, in der sie

schon im Jahre 1887 von W. Voigt bei Erörterungen über das Dopplersche Prinzip benutzt worden sind, nämlich:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = a z - b c t,$$

$$t' = a t - \frac{b}{c} z;$$

dabei erfüllen die Konstanten $a > 0$, b die Relation

$$a^2 - b^2 = 1,$$

welche die Identität

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

zur Folge hat. Der Ursprung des Systems x', y', z' bewegt sich gegen das System x, y, z in der z-Richtung mit der Geschwindigkeit $\frac{b}{a} c$, die immer kleiner als c ist. Überhaupt muß jede Geschwindigkeit kleiner als c angenommen werden.

Sämtliche Zustandsgrößen irgendeiner Erscheinung, in dem einen bezw. dem andern System gemessen, hängen durch gewisse Transformationsformeln zusammen. Diese lauten z. B. für die Geschwindigkeit eines Punktes

$$\mathfrak{v}_x' = \frac{\mathfrak{v}_x}{\omega}, \quad \mathfrak{v}_y' = \frac{\mathfrak{v}_y}{\omega}, \quad \mathfrak{v}_z' = \frac{a \mathfrak{v}_z - b c}{\omega},$$

wobei

$$\omega = a - \frac{b \mathfrak{v}_z}{c}$$

ist.

Wir betrachten weiter ein System von Punkten, deren Geschwindigkeit eine stetige Funktion der Koordinaten ist. Es sei dS ein den Punkt $P(x, y, z)$ umgebendes Raumelement zur Zeit t; diesem Werte t und den Koordinaten von P entspricht nach den Transformationsgleichungen ein Zeitpunkt t' in dem andern Bezugssystem, und jeder Punkt, der zur Zeit t in dS liegt, hat für diesen festgesetzten Wert von t' bestimmte x', y', z'. Die Punkte x', y', z' erfüllen ein Raumelement dS', welches mit dS so zusammenhängt:

$$dS' = \frac{dS}{\omega}.$$

Denken wir uns mit den Punkten ein Agens (Materie, Elektrizität etc.) verbunden, und nehmen wir an, daß der Beobachter B Anlaß habe, mit jedem Punkte dieselbe Menge des Agens zu verbinden wie der Beobachter A, so müssen sich offenbar die Raumdichten umgekehrt verhalten wie die Volumelemente, d. h.

$$\varrho' = \omega \varrho.$$

Alle diese Beziehungen sind reziprok, d. h. man kann die gestrichenen und ungestrichenen Buchstaben vertauschen, wenn man gleichzeitig b durch $-b$ ersetzt.

Die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes behalten bei der Transformation ihre Gestalt, wenn man folgende Größen einführt:

$$\mathfrak{d}_x' = a \mathfrak{d}_x - b \mathfrak{h}_y, \quad \mathfrak{d}_y' = a \mathfrak{d}_y + b \mathfrak{h}_x, \quad \mathfrak{d}_z' = \mathfrak{d}_z,$$
$$\mathfrak{h}_x' = a \mathfrak{h}_x + b \mathfrak{d}_y, \quad \mathfrak{h}_y' = a \mathfrak{h}_y - b \mathfrak{d}_x, \quad \mathfrak{h}_z' = \mathfrak{h}_z;$$

zwischen diesen, der transformierten Raumdichte ϱ' und der transformierten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ gelten also im System x', y', z', t' die Gleichungen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{d}' = \varrho',$$
$$\operatorname{div} \mathfrak{h}' = 0,$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{h}' = \frac{1}{c} (\dot{\mathfrak{d}}' + \varrho' \mathfrak{v}'),$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{d}' = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{h}}'.$$

Insoweit genügen die Feldgleichungen der Elektronentheorie dem Relativitätsprinzip; es wird sich aber noch darum handeln, die Bewegungsgleichungen der Elektronen selbst mit dem Prinzip in Einklang zu bringen.

Wir werden, etwas allgemeiner, die Bewegung eines beliebigen materiellen Punktes betrachten. Hierbei ist die Einführung des Begriffs „Eigenzeit", einer schönen Erfindung Minkowskis, von Nutzen. Danach gehört jedem Punkte gewissermaßen eine eigene Zeit zu, die vom gewählten Bezugssystem unabhängig ist; ihr Differential wird definiert durch die Gleichung:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\, dt.$$

Die mit Hilfe der Eigenzeit τ gebildeten Ausdrücke

$$\frac{d}{d\tau} \frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d}{d\tau} \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{d}{d\tau} \frac{dz}{d\tau},$$

lineare homogene Funktionen der gewöhnlichen Beschleunigungskomponenten, bezeichnen wir als Komponenten der „Minkowskischen Beschleunigung". Wir beschreiben die Bewegung eines Punktes durch die Gleichungen:

$$m \frac{d}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} = \mathfrak{X}, \text{ usw.},$$

wo m eine Konstante ist, die wir die „Minkowskische Masse" nennen. Den Vektor $\mathfrak{X}$ bezeichnen wir als die „Minkowskische Kraft".

Es lassen sich dann leicht die Transformationsformeln für diese Beschleunigung und Kraft ableiten; m lassen wir ungeändert. So hat man

$$\mathfrak{X}_x' = \mathfrak{X}_x, \quad \mathfrak{X}_y' = \mathfrak{X}_y, \quad \mathfrak{X}_z' = a \mathfrak{X}_z - \frac{b}{c} (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{X}).$$

Das Wesentliche ist nun folgendes. Das Relativitätsprinzip erfordert, daß, wenn bei einer wirklichen Erscheinung die Minkowskischen Kräfte in bestimmter Weise von den Koordinaten, Geschwindigkeiten etc. im einen Bezugssystem abhängen, die transformierten Minkowskischen Kräfte im andern Bezugssystem in der-

selben Weise von den transformierten Koordinaten, Geschwindigkeiten etc. abhängen. Das ist eine besondere Eigenschaft, die alle Kräfte der Natur haben müssen, wenn das Relativitätsprinzip gelten soll. Setzen wir das voraus, so kann man die auf bewegte Körper wirkenden Kräfte berechnen, wenn man sie für den Fall der Ruhe kennt. Bewegt sich z. B. ein Elektron von der Ladung e, so denken wir uns ein Bezugssystem, in dem es momentan ruht. Dann wirkt auf das Elektron in diesem System die Minkowskische Kraft

$$\mathfrak{K} = e\,\mathfrak{d};$$

hieraus folgt durch Anwendung der Transformationsgleichungen für $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{d}$, daß die in einem beliebigen Koordinatensystem auf das mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegte Elektron wirkende Minkowskische Kraft

$$\mathfrak{K} = e\,\frac{\mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{h}]}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}$$

beträgt. Diese Formel stimmt mit dem gewöhnlichen Ansatz der Elektronentheorie nicht überein infolge des Auftretens des Nenners. Der Unterschied rührt daher, daß man gewöhnlich nicht mit unserer Minkowskischen, sondern der „Newtonschen Kraft" $\mathfrak{F}$ operiert, und wir sehen, daß für ein Elektron diese beiden Kräfte folgendermaßen zusammenhängen:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{K}\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}.$$

Man wird annehmen, daß diese Beziehung für beliebige materielle Punkte gilt.

Somit kann man die Bewegungserscheinungen auf zwei verschiedene Weise behandeln, entweder mit der Minkowskischen oder mit der Newtonschen Kraft. Im letzteren Falle lauten die Bewegungsgleichungen

$$\mathfrak{F} = m_1\,\mathfrak{j}_1 + m_2\,\mathfrak{j}_2,$$

und hier bedeuten $\mathfrak{j}_1$ die gewöhnliche Beschleunigung in der Richtung der Bewegung, $\mathfrak{j}_2$ die gewöhnliche Normalbeschleunigung, und man nennt die Faktoren

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^3}},$$

$$m_2 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}$$

die „longitudinale" und „transversale Masse".

Genau so wie die Minkowskischen Kräfte, müssen auch die in der Natur vorkommenden Newtonschen Kräfte bestimmten Bedingungen genügen, wenn das Relativitätsprinzip erfüllt sein soll. Das ist z. B. der Fall, wenn, unabhängig von der Bewegung, auf eine Fläche ein Normaldruck von der konstanten Größe p pro Flächeneinheit wirkt; im transformierten System wirkt dann auf das entsprechende bewegte Flächenelement ein normaler Druck von der gleichen Größe. Da wir die Invarianz der Feldgleichungen bereits erkannt haben, läuft die Frage, ob die Bewegungen in einem Elektronensystem dem Relativitätsprinzip entsprechen, lediglich auf eine experimentelle Prüfung der Formeln für die longitudinale und transversale Masse m_1, m_2 heraus; obgleich die Versuche von Bucherer und Hupka diese Formeln zu bestätigen scheinen, ist man zu einer definitiven Entscheidung noch nicht gekommen.

Bezüglich der Masse des Elektrons ist noch zu bedenken, daß diese — elektromagnetischer Natur ist; sie wird also von der Verteilung der Ladungen innerhalb des Elektrons abhängen. Die Formeln für die Masse können daher nur dann richtig sein, wenn die Ladungsverteilung und damit auch die Gestalt des Elektrons in bestimmter Weise mit der Geschwindigkeit veränderlich sind. Man muß annehmen, daß infolge einer Translation ein Elektron, das ruhend eine Kugel ist, ein in der Bewegungsrichtung abgeplattetes Ellipsoid wird; der Betrag der Abplattung ist

$$\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}.$$

Nehmen wir an, daß die Gestalt und Größe des Elektrons durch innere Kräfte reguliert werden, so müssen diese, um mit dem Relativitätsprinzip verträglich zu sein, derartige Eigenschaften haben, daß sich jene Abplattung bei der Bewegung von selbst einstellt. Hierzu hat Poincaré folgende Hypothese gemacht. Das Elektron ist eine geladene, ausdehnbare Haut, und den elektrischen Abstoßungen der einzelnen Punkte des Elektrons widersetzt sich eine innere Normalspannung von unveränderlicher Größe. In der Tat genügen nach obigem solche Normalspannungen dem Relativitätsprinzip.

In derselben Weise müssen alle innerhalb der ponderablen Materie wirksamen Molekularkräfte, ebenso die auf die Elektronen wirkenden quasielastischen und Widerstandskräfte, bestimmten Bedingungen genügen, um mit dem Relativitätsprinzip im Einklang zu sein. Dann wird jeder bewegte Körper für einen mitbewegten Beobachter unverändert sein, für einen ruhenden aber eine Veränderung der Dimensionen erfahren, die eben eine Folge der durch jene Bedingungen geforderten Änderung der Molekularkräfte ist. Hieraus ergibt sich auch von selbst jene Verkürzung der Körper, welche schon

früher erdacht wurde zur Erklärung des negativen Ausfalls des Michelsonschen Interferenzversuches und aller ähnlichen Versuche, die einen Einfluß der Erdbewegung auf optische Erscheinungen feststellen sollten.

Was den starren Körper anlangt, mit dem sich Born, Herglotz, Noether, Levi-Civita beschäftigt haben, so werden die bei der Betrachtung der Rotationen auftretenden Schwierigkeiten wohl dadurch zu heben sein, daß man die Starrheit der Wirksamkeit besonders intensiver Molekularkräfte zuschreibt.

Schließlich wollen wir uns der Gravitation zuwenden. Das Relativitätsprinzip erfordert eine Abänderung des Newtonschen Gesetzes, vor allem eine Fortpflanzung der Wirkung mit Lichtgeschwindigkeit. Die Möglichkeit einer endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraft ist schon von Laplace diskutiert worden, der sich als Ursache der Schwerkraft ein gegen die Sonne strömendes Fluidum dachte, das die Planeten gegen die Sonne drückt. Er fand, daß die Geschwindigkeit c dieses Fluidums wenigstens 100 Millionen mal größer als die des Lichtes angenommen werden müsse, damit die Rechnung mit den astronomischen Beobachtungen im Einklang bleibt. Die Notwendigkeit eines so großen Wertes von c rührt daher, daß in seinen Endformeln die Größe $\frac{v}{c}$ in der ersten Potenz auftritt, wo v die Planetengeschwindigkeit ist. Soll nun aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Schwerkraft den Wert der Lichtgeschwindigkeit haben, wie es das Relativitätsprinzip fordert, so kann ein Widerspruch mit den Beobachtungen nur dann vermieden werden, wenn in dem Ausdruck für das modifizierte Gravitationsgesetz nur Größen zweiter (und höherer) Ordnung in $\frac{v}{c}$ auftreten.

Beschränkt man sich auf Größen zweiter Ordnung, so läßt sich leicht auf Grund einer naheliegenden elektronentheoretischen Analogie eine Bedingung angeben, die das abgeänderte Gesetz in eindeutiger Weise festlegt. Betrachtet man nämlich die Kraft, die auf ein mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegtes Elektron wirkt,

$$e\,(\mathfrak{d} + \tfrac{1}{c}[\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{h}]),$$

so hängen die Vektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ noch von den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}'$ der das Feld erzeugenden Elektronen ab; in dem Vektorprodukt $[\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{h}]$ kommen daher wohl die Produkte der Form $\mathfrak{v}\mathfrak{v}'$ vor, nicht aber das Quadrat $\mathfrak{v}^2$ der Geschwindigkeit des betrachteten Elektrons. Nehmen wir entsprechend an, daß im Ausdruck der auf den Punkt 1 wirkenden Anziehung, ausgeübt von Punkt 2, das Quadrat der Geschwindigkeit des Punktes 1, $\mathfrak{v}_1^2$, nicht auftritt, so muß in einem Bezugssystem, in dem der Punkt 2 ruht ($\mathfrak{v}_2 = 0$), jede Geschwindigkeit überhaupt herausfallen; das Gesetz wird sich daher in diesem System auf das gewöhnliche Newtonsche reduzieren. Geht man jetzt durch Transformation zu einem beliebigen Koordinatensystem über, so findet man, daß sich die auf den Punkt 1 wirkende Kraft aus zwei Teilen zusammensetzt, erstens einer Anziehung in Richtung der Verbindungslinie vom Betrage

$$R + \frac{1}{c^2}\Big\{\frac{1}{2}\mathfrak{v}_2^2 R + \frac{1}{2}\mathfrak{v}_{2r}^2\Big(r\frac{dR}{dr} - R\Big) - (\mathfrak{v}_1\cdot\mathfrak{v}_2)R\Big\},$$

zweitens einer Kraft in der Richtung $\mathfrak{v}_2$ vom Betrage

$$\frac{1}{c^2}\mathfrak{v}_{1r}R\mathfrak{v}_2;$$

hier bedeutet r die Entfernung zwischen zwei gleichzeitigen Lagen beider Punkte, $\mathfrak{v}_r$ die Komponente von $\mathfrak{v}$ nach der von 1 nach 2 gezogenen Verbindungslinie und R diejenige Funktion von r, welche im Falle der Ruhe das Anziehungsgesetz darstellt ($R = \frac{k}{r^2}$ bei der Newtonschen Attraktion, $R = kr$ bei quasielastischen Kräften). Zu beachten ist, daß hier unter „Kraft" immer die „Newtonsche Kraft" zu verstehen ist, nicht die „Minkowskische". Übrigens hat Minkowski für das Gesetz der Schwerkraft einen etwas anderen Ausdruck angegeben. Bei Poincaré findet sich sowohl dieser, als auch der oben hingeschriebene.

3. Vortrag.

Am Schluß des vorigen Vortrages wurde ein modifiziertes Gesetz der Gravitation angegeben, das mit dem Relativitätsprinzip in Übereinstimmung ist. Es ist zu beachten, daß dabei das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung nicht erfüllt ist.

Es sollen nun die Störungen erörtert werden, welche durch jene Zusatzglieder zweiter Ordnung entstehen können. Es gibt da neben vielen kurzperiodischen Störungen, die keine Bedeutung haben, eine säkulare Bewegung des Perihels der Planeten. Prof. de Sitter berechnet diese für den Merkur zu 6″,69 pro Jahrhundert. Nun kennt man seit Laplace eine Perihelanomalie des Merkurs vom Betrage 44″ pro Jahrhundert; wenn diese auch das richtige Vorzeichen hat, ist sie doch viel zu groß, um durch jene Zusatzglieder erklärt werden zu können. Vielmehr wird sie von Seeliger auf eine Störung durch den Träger des Zodiakallichtes zurückgeführt,

dessen Masse man in plausibler Weise geeignet bestimmen kann. Hieraus kann also keine Entscheidung gewonnen werden, so lange nicht die Genauigkeit der astronomischen Messungen wesentlich gesteigert wird. Bei einer absoluten Genauigkeit wäre auch der Unterschied der „Eigenzeit" der Erde von der Zeit des Sonnensystems zu berücksichtigen.

Eine andere Methode, die Gültigkeit des abgeänderten Gravitationsgesetzes zu prüfen, kann man auf ein Verfahren gründen, das Maxwell zur Entscheidung darüber vorgeschlagen hat, ob das Sonnensystem sich durch den Äther hindurchbewegt. Ist dieses der Fall, so müßten die Verfinsterungen der Trabanten des Jupiters, je nach der Stellung dieses Planeten zur Erde, Verfrühungen oder Verspätungen erleiden.

Denn beträgt die Entfernung Jupiter—Erde a und die Geschwindigkeitskomponente des Sonnensystems im Äther in Richtung der Verbindungslinie Jupiter—Erde v, so wird die Zeit $\frac{a}{c}$, die das Licht im Falle der Ruhe zum Durchlaufen der Strecke a brauchen würde, verwandelt in $\frac{a}{c+v}$; es kommt also durch die Bewegung eine Verfrühung oder Verspätung zustande, die bis auf Glieder zweiter Ordnung $\frac{av}{c^2}$ beträgt und die je nach dem Werte der Geschwindigkeitskomponente v, welche ja von der Stellung der beiden Planeten abhängt, verschiedene Werte annimmt. Nun ist klar, daß eine solche Abhängigkeit der Erscheinungen von der Bewegung durch den Äther dem Relativitätsprinzip widerspricht.

Um diesen Widerspruch aufzuklären, wollen wir uns die Sachlage schematisch vereinfachen. Wir denken uns, daß die Sonne S eine Masse habe, die im Verhältnis zu der des Planeten unendlich groß sei. Die Geschwindigkeit des Sonnensystems falle in die z-Achse, die wir durch die Sonne gehen lassen. Die Schnittpunkte der Bahn des Planeten mit der z-Achse bezeichnen wir als oberen bezw. unteren Durchgang. A bezw. B. (Fig. 1.)

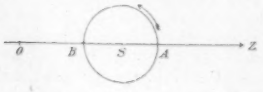


Fig. 1.

Den Beobachter verlegen wir auf die Sonne. Bei jedem Durchgange des Planeten durch die z-Achse möge ein Lichtsignal zur Sonne hin eilen. Die Umlaufszeit sei T. Wenn die Sonne ruht, wird bei der als kreisförmig vorausgesetzten Bewegung die Zeit zwischen oberem und unterem Durchgange $\frac{1}{2}T$ betragen; desgleichen auch die Zeit zwischen dem Eintreffen der beiden Lichtsignale. Bewegt sich dagegen die Sonne in der z-Richtung, so muß das Lichtsignal vom oberen Durchgange eine Verfrühung um $\frac{av}{c^2}$, das vom unteren Durchgange eine Verspätung vom selben Betrage erleiden; falls die gleichförmige Umlaufsbewegung (wie Maxwell als selbstverständlich voraussetzt) ungestört erhalten bleibt, würde das Zeitintervall zwischen dem Eintreffen der Lichtsignale zweier aufeinanderfolgender Durchgänge abwechselnd um $\frac{2av}{c^2}$ vergrößert und verkleinert erscheinen. Die hierbei vorausgesetzte Erhaltung der gleichförmigen Kreisbewegung bei einer Translation im Äther ist aber nach dem Relativitätsprinzip unmöglich. Beschreiben wir nämlich den Vorgang in einem Koordinatensystem, das an der Bewegung nicht teilnimmt, so wird das modifizierte Gravitationsgesetz anzuwenden sein, und dieses ergibt eine Ungleichförmigkeit der Planetenbewegung, infolge deren die Verschiedenheit der Zeitintervalle zwischen dem Eintreffen der Lichtsignale gerade aufgehoben wird.

Es kann daher die Feststellung, ob eine Verfrühung oder Verspätung der Verfinsterungen wirklich eintritt, zur Entscheidung für oder gegen das Relativitätsprinzip benutzt werden. Allerdings sind die numerischen Verhältnisse wieder recht ungünstig. So schätzt Herr Burton, dem 330 photometrische Beobachtungen zur Verfügung stehen, die an der Harvard-Sternwarte über die Verfinsterungen des 1. Jupitersatelliten angestellt worden sind, den wahrscheinlichen Fehler des schließlichen Resultats für v auf 50 km/sec; andrerseits hat man Sterngeschwindigkeiten von 70 km/sec beobachtet und die Geschwindigkeit des Sonnensystems gegen den Fixsternhimmel wird auf 20 km/sec geschätzt. Durch Burtons Berechnungen wird also das Relativitätsprinzip schwerlich gestützt, höchstens zu Fall gebracht werden können, nämlich wenn sich schließlich z. B. ein 100 km/sec übersteigender Wert ergäbe.

Lassen wir es dahin gestellt, ob die neue Mechanik durch astronomische Beobachtungen eine Bestätigung erfahren wird oder nicht. Doch wollen wir es nicht unterlassen, noch einige ihrer Grundformeln kennen zu lernen.

Definiert man die Arbeit als das skalare Produkt aus „Newtonscher Kraft" und Ver-

schiebung, so ergeben die Bewegungsgleichungen das Energieprinzip in der gewöhnlichen Form, daß die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit gleich der Zunahme der Energie ε ist:

$$\mathfrak{F}_x \frac{dx}{dt} + \mathfrak{F}_y \frac{dy}{dt} + \mathfrak{F}_z \frac{dz}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Dabei hat die Energie den Ausdruck:

$$\varepsilon = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}} - 1 \right);$$

das stimmt bis auf Glieder 2. Ordnung mit dem Wert der kinetischen Energie der gewöhnlichen Mechanik

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \mathfrak{v}^2$$

überein.

Ferner kann man aus den Bewegungsgleichungen das Hamiltonsche Prinzip

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta A)\, dt = 0$$

ableiten; hier ist δA die Arbeit der „Newtonschen Kraft" bei einer virtuellen Verrückung und L die Lagrangesche Funktion, die folgendermaßen lautet:

$$L = -mc^2 \left(\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}} - 1 \right).$$

Aus dem Hamiltonschen Prinzip kann man umgekehrt wieder die Bewegungsgleichungen gewinnen. Die Größen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$$

werden als Komponenten der Bewegungsgröße zu bezeichnen sein.

Alle die Formeln kann man an den elektromagnetischen Bewegungsgesetzen eines Elektrons verifizieren; man hat dann für die „Minkowskische Masse" m den Wert

$$m = \frac{e^2}{6\pi R c^2}$$

zu setzen und zu der elektrischen und der magnetischen Energie die Energie jener inneren Spannungen hinzuzufügen, welche, wie wir sahen, die Form des Elektrons bestimmen. So kann man aus dem allgemeinen Prinzip der kleinsten Wirkung für beliebige elektromagnetische Systeme, welches in dem ersten Vortrage besprochen wurde, durch Spezialisierung auf ein Elektron das eben angegebene Hamiltonsche Prinzip für einen materiellen Punkt gewinnen, doch muß wieder die Arbeit jener inneren Spannungen berücksichtigt werden.

Wir gehen jetzt dazu über, die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für ponderable Körper zu betrachten. Diese sind rein phänomenologisch von Minkowski aufgestellt worden, dann ist von M. Born und Ph. Frank gezeigt worden, daß sie sich auch aus den Vorstellungen der Elektronentheorie herleiten lassen; auch Lorentz selbst hat auf letzterem Wege die Gleichungen in einer formal etwas abweichenden Gestalt erhalten.

Um Beziehungen zwischen beobachtbaren Größen zu bekommen, muß man durch Bildung von Mittelwerten über große Mengen von Elektronen die Einzelheiten der von ihnen herrührenden Erscheinungen verwischen. Man wird so auf folgende Gleichungen geführt (die mit denen der gewöhnlichen Maxwellschen Theorie gleichlauten):

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho_l,$$
$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} (\mathfrak{C} + \dot{\mathfrak{D}}),$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}}.$$

Hierin ist $\mathfrak{D}$ die dielektrische Verschiebung, $\mathfrak{B}$ die magnetische Induktion, $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft, $\mathfrak{E}$ die elektrische Kraft, $\mathfrak{C}$ der elektrische Strom, ϱ_l die Dichte der beobachtbaren elektrischen Ladungen. Deutet man die Mittelwertbildung durch Überstreichen an, so ist z. B.

$$\mathfrak{E} = \bar{\mathfrak{d}}, \quad \mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{h}},$$

wo $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{h}$ die frühere Bedeutung haben; ferner ist

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P},$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B} - \mathfrak{M} - \frac{1}{c} [\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{w}],$$

wo $\mathfrak{P}$ das elektrische Moment, $\mathfrak{M}$ die Magnetisierung pro Volumeinheit und $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit der Materie bedeuten. Bei der Ableitung dieser Formeln sondert man die Elektronen in drei Arten. Die erste Art, die Polarisationselektronen, erzeugen durch ihre Verschiebung das elektrische Moment $\mathfrak{P}$; die zweite Art, die Magnetisierungselektronen, erzeugen durch ihre Umläufe den magnetischen Zustand $\mathfrak{M}$; die dritte Art, die Leitungselektronen, bewegen sich frei in der Materie und erzeugen die beobachtbare Ladungsdichte ϱ_l und den Strom $\mathfrak{C}$. Letzterer ist noch in zwei Teile zu trennen; denn ist $\mathfrak{u}$ die Relativgeschwindigkeit der Elektronen gegen die Materie, so ist die gesamte Geschwindigkeit der Elektronen $\mathfrak{v} = \mathfrak{w} + \mathfrak{u}$, also der von ihnen transportierte Strom

$$\mathfrak{C} = \overline{\varrho \mathfrak{v}} = \varrho \mathfrak{w} + \overline{\varrho \mathfrak{u}};$$

ϱ ist die beobachtbare Ladung ϱ_l, $\varrho \mathfrak{w}$ der Konvektionsstrom, $\overline{\varrho \mathfrak{u}}$ der eigentliche Leitungsstrom.

Für alle diese Größen existieren Trans-

formationsformeln, von denen einige angegeben werden mögen:

$$\mathfrak{E}_x' = \mathfrak{E}_x, \quad \mathfrak{E}_y' = \mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{E}_z' = a\mathfrak{E}_z - bc\varrho_l,$$

$$\varrho_l' = a\varrho_l - \frac{b}{c}\mathfrak{E}_z,$$

$$\mathfrak{P}_x' = a\mathfrak{P}_x - \frac{b}{c}(\mathfrak{w}_z\mathfrak{P}_x - \mathfrak{w}_x\mathfrak{P}_z) + b\mathfrak{M}_y,$$

$$\mathfrak{P}_y' = a\mathfrak{P}_y - \frac{b}{c}(\mathfrak{w}_z\mathfrak{P}_y - \mathfrak{w}_y\mathfrak{P}_z) - b\mathfrak{M}_x,$$

$$\mathfrak{P}_z' = \mathfrak{P}_z.$$

Ferner sind folgende Hilfsvektoren von Nutzen:

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{D}], \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}],$$

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{B}], \quad \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}].$$

Die angegebenen Feldgleichungen müssen jetzt noch ergänzt werden durch Aufstellung der Beziehungen, die zwischen den Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ bestehen. Man kann diese Relationen auf zwei Weisen gewinnen.

Die erste phänomenologische Methode verfährt so: Man betrachtet einen beliebig bewegten Punkt der Materie und führt ein Bezugssystem ein, in dem dieser ruht; dann wird, falls das den Punkt umgebende Volumelement in dem Ruhesystem isotrop ist, z. B. zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ die für ruhende Körper zutreffende Gleichung gelten

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E},$$

oder auch

$$\mathfrak{D}_1 = \varepsilon\mathfrak{E}_1,$$

weil die Hilfsvektoren $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{E}_1$ für $\mathfrak{w} = 0$ mit $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ identisch sind. Nun transformieren sich aber $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{E}_1$ in gleicher Weise, und daraus folgt, daß auch im ursprünglichen Bezugssystem die Gleichung

$$\mathfrak{D}_1 = \varepsilon\mathfrak{E}_1,$$

und entsprechend

$$\mathfrak{B}_1 = \mu\mathfrak{H}_1,$$

gültig bleibt. Was den Leitungsstrom betrifft, so bemerken wir nur, daß er von $\mathfrak{E}_1$ abhängt.

Die zweite Methode geht auf die Mechanik der Elektronen zurück. Ebenso wie sich für ruhende Körper die Gleichung $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ als Folge der Annahme quasielastischer Kräfte erweist, die die Elektronen in ihre Ruhelagen zurückziehen, wird man bei bewegten Körpern die Gleichung $\mathfrak{D}_1 = \varepsilon\mathfrak{E}_1$ erhalten, wenn man den quasielastischen Kräften diejenigen Eigenschaften zuschreibt, die das Relativitätsprinzip verlangt. Letzteres wird erfüllt sein, wenn man für diese Kräfte den Ausdruck des verallgemeinerten Attraktionsgesetzes ansetzt, wobei R proportional r genommen werden muß.

Ähnliches gilt von der Erklärung des Leitungswiderstandes. Eine befriedigende elektronentheoretische Erklärung der magnetischen Eigenschaften der Körper ist zurzeit nicht vorhanden.

Zum Abschluß soll die Bedeutung der vorstehenden Gleichungen an drei bemerkenswerten Fällen erläutert werden.

Die erste Bemerkung knüpft an die Gleichung

$$\varrho_l' = a\varrho_l - \frac{b}{c}\mathfrak{E}_z$$

an. Zufolge dieser kann ϱ_l' verschwinden, ohne daß $\varrho_l = 0$ zu sein braucht, wenn nur ein Strom $\mathfrak{E}$ vorhanden ist; d. h. ein Beobachter A wird den Körper für geladen erklären, den ein relativ zu ihm bewegter B für ungeladen halten muß. Man kann das verstehen, wenn man beachtet, daß in jedem Körper gleich viele positive und negative Elektronen vorhanden sind, die sich bei ungeladenen Körpern kompensieren. Bewegt sich der Körper mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$, so werden, wenn ein Leitungsstrom vorhanden ist, beide Elektronenarten verschiedene Gesamtgeschwindigkeiten erhalten, also wird für beide Arten auch die Größe $\omega = a - b\frac{\mathfrak{v}_z}{c}$ verschiedene Werte haben. Berechnet nun ein mit dem Körper bewegter Beobachter B den Mittelwert der Ladungsdichte $\varrho' = \overline{\omega\varrho}$ für beide Arten von Elektronen, so kann er die Summe Null erhalten, auch wenn sich für einen Beobachter A, in dessen Bezugssystem der Körper sich bewegt, die Mittelwerte ϱ der positiven und negativen Elektronen nicht kompensieren.

Dieser Umstand ruft eine Reminiszenz an eine alte Frage hervor. Um das Jahr 1880 gab es unter den Physikern eine große Diskussion über das Clausiussche Grundgesetz der Elektrodynamik. Man wollte damals einen Widerspruch dieses Gesetzes mit den Beobachtungen herleiten, indem man schloß, daß nach dem Gesetze ein auf der Erde befindlicher stromdurchflossener Leiter auf eine mitbewegte Ladung e infolge der Erdbewegung eine Wirkung ausüben müßte, die man hätte auffinden können. Daß das Gesetz tatsächlich diese Wirkung nicht fordert, hat Budde bemerkt; es rührt das daher, daß der Strom durch die Erdbewegung auch auf sich selbst wirkt und eine „Kompensationsladung" auf dem durchflossenen Leiter hervorruft, die jene erste Wirkung genau aufhebt. Zu ähnlichen Schlüssen führt die Elektronentheorie und Lorentz findet für die Dichte der Kompensationsladung, wenn die Geschwindigkeit die Richtung der z-Achse hat,

$$\frac{1}{c^2}\mathfrak{w}_z\mathfrak{E}_z;$$

diese muß ein an der Bewegung der Erde nicht teilnehmender Beobachter A annehmen, während sie für einen mitbewegten Beobachter B nicht besteht. Der angegebene Wert stimmt genau mit der aus dem Relativitätsprinzip abgeleiteten Formel überein; denn ist $\varrho_l' = 0$, so findet man aus dieser Formel

$$\varrho_l = \frac{b}{ac}\mathfrak{E}_z,$$

und da $\mathfrak{w}_z = \frac{bc}{a}$ nach dem im zweiten Vortrage (S. 1237) Gesagten die Geschwindigkeit der beiden Bezugssysteme gegeneinander ist, so findet man in der Tat

$$\varrho_l = \frac{1}{c^2}\mathfrak{w}_z\mathfrak{E}_z.$$

Die zweite Bemerkung geht von den Transformationsgleichungen für das elektrische Moment $\mathfrak{P}$ (S. 1241) aus, welche dadurch, daß in ihnen die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ vorkommt, die Unmöglichkeit erkennen lassen, scharf zwischen Polarisations- und Magnetisierungselektronen zu unterscheiden. Vielmehr kann in einem magnetisierten Körper ($\mathfrak{M} \neq 0$) von einem Bezugssystem aus beurteilt $\mathfrak{P} = 0$ sein, während von einem andern $\mathfrak{P}'$ von Null verschieden ist. Es soll das nun auf einen speziellen Fall angewendet werden, wobei wir uns auf Größen 1. Ordnung beschränken. Der betrachtete Körper (etwa ein Stahlmagnet) enthalte nur Leitungselektronen und solche, die, wenn der Körper ruht, ein $\mathfrak{M}$, aber kein $\mathfrak{P}$ hervorbringen; er habe die Gestalt einer unendlich ausgedehnten ebenen Platte, begrenzt von zwei Ebenen a, b; die Mittelebene machen wir zur yz-Ebene (Fig. 2). Wenn er

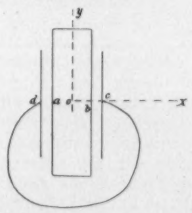


Fig. 2.

ruht, möge in der y-Richtung eine konstante Magnetisierung $\mathfrak{M}_y$ bestehen, während $\mathfrak{P} = 0$ ist. Bekommt der Körper in der z-Richtung die Geschwindigkeit v, so wird ein an der Bewegung nicht teilnehmender Beobachter die elektrische Polarisation

$$\mathfrak{P}_x = -\frac{v}{c}\mathfrak{M}_y$$

wahrnehmen. Jetzt denken wir uns zu beiden Seiten des Körpers zwei Konduktoren c, d, welche mit ihm zusammen zwei gleiche Kondensatoren bilden, und diese mögen durch einen Draht (von c nach d) kurzgeschlossen sein. Bei der Bewegung werden auf c und d Ladungen entstehen, die sich so berechnen lassen. Da offenbar ein Strom in der x-Richtung unmöglich ist, ist $\mathfrak{E}_{1x} = 0$ oder $\mathfrak{E}_x = \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y$. Da der Vorgang stationär ist, wird $\dot{\mathfrak{B}} = 0$; dann folgt aus rot $\mathfrak{E} = 0$ die Existenz eines Potentials φ. Ist Δ die Dicke der Platte, so hat man

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{v}{c}\Delta\mathfrak{B}_y.$$

Aus der Symmetrie der Anordnung folgt offenbar

$$\varphi_d - \varphi_a = \varphi_b - \varphi_c,$$

und weil die Platten c, d kurzgeschlossen sind, muß

$$\varphi_d = \varphi_c$$

sein; daraus ergibt sich

$$\varphi_d - \varphi_a = -\frac{v}{2c}\Delta\mathfrak{B}_y.$$

Ist γ die Kapazität eines der beiden Kondensatoren, so wird die Ladung der Platte d gleich

$$-\frac{v}{2c}\gamma\Delta\mathfrak{B}_y,$$

und c bekommt den entgegengesetzt gleichen Betrag.

Jetzt vergleichen wir diesen Vorgang mit dem umgekehrten Fall, daß der Magnet a, b ruht und die Platten c, d sich mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit bewegen. Dann müßte nach dem Relativitätsprinzip alles ganz ebenso sein, wie im ersten Falle. In der Tat findet man sofort aus dem gewöhnlichen Induktionsgesetz genau den oben angegebenen Betrag der Ladung auf der Platte d. Aber es muß jetzt diese Ladung auf d eine entgegengesetzt gleiche auf der Ebene a des ruhenden Magneten influenzieren, und Entsprechendes muß für b und c gelten. Da ein Strom nicht fließen kann ($\mathfrak{E} = 0$), müssen in beiden Fällen, ob der Magnet sich bewegt und die Platten ruhen, oder umgekehrt, dieselben Ladungen auf dem Magneten bestehen. Wir haben uns also zu überlegen, wie es kommt, daß in dem zuerst behandelten Falle auf der Ebene a des bewegten Magneten die entgegengesetzte Ladung wie auf der Platte d auftritt; es wird dies nur möglich durch jene bei der Bewegung entstehende Polarisation $\mathfrak{P}_x = -\frac{v}{c}\mathfrak{M}_y$.

Denn man hat

$$\mathfrak{D}_x = \mathfrak{E}_x + \mathfrak{P}_x = \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{M}_y;$$

da hier $\mathfrak{P}$ in der Geschwindigkeit von der ersten Ordnung, also das Glied $[\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{w}]$ zu vernachlässigen ist, wird

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{M} = \mathfrak{H},$$

$\mathfrak{H}$ aber ist Null, weil die Platte unendlich ausgedehnt angenommen wird. Daraus folgt

$$\mathfrak{D}_x = 0,$$

in der bewegten Platte findet keine dielektrische Verschiebung statt, also entspricht die Ladung auf a der auf d, wie es das Relativitätsprinzip verlangt.

Die letzte Bemerkung betrifft wiederum den Umstand, daß nach dem Relativitätsprinzip die Bewegung der Erde einen Einfluß auf die elektromagnetischen Vorgänge nicht haben kann. Es ist aber von Liénard auf eine Erscheinung aufmerksam gemacht worden, wo ein solcher Einfluß, und zwar zu einem Betrage 1. Ordnung, zu erwarten sein soll; auch Poincaré hat diesen Fall in seinem Buche Electricité et Optique diskutiert. Es handelt sich um die ponderomotorische Kraft auf einen Leiter. Um diese zu bestimmen, wird man für die auf die Leitungselektronen wirkende Kraft pro Einheit der Ladung den naheliegenden Ansatz machen:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{B}];$$

dann ergibt sich die durch die Erdbewegung hervorgerufene Kraft auf den Leiter in Richtung der Bewegung vom Betrage

$$\frac{1}{c^2}(\mathfrak{C}_l\cdot\mathfrak{E})\,\mathfrak{w}_x;$$

da $(\mathfrak{C}_l\cdot\mathfrak{E})$ die vom Leitungsstrom $\mathfrak{C}$ entwickelte Wärme ist, ist dieser Ausdruck leicht numerisch zu berechnen (wobei sich freilich ein der Beobachtung unzugänglicher Wert ergibt).

Fragt man sich nun, wie dieses dem Relativitätsprinzip widersprechende Resultat zustande kommen kann, so sieht man, daß man in der Tat nicht die Kraft berechnet hat, welche auf die Materie des Leiters, sondern auf die im Innern des Leiters beweglichen Elektronen wirkt. Letztere Kraft muß erst durch Kräfte, die uns im einzelnen unbekannt sind, auf die Materie übertragen werden, und das geschieht nur dann ohne Änderung der Größe, wenn für die Kräfte zwischen Materie und Elektronen Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung besteht. Für bewegte Körper ist aber in diesem Fall nach dem Relativitätsprinzip die Wirkung nicht gleich der Gegenwirkung, und dieser Umstand kompensiert gerade genau jene Liénardsche Kraft.

Zusammenfassend kann man sagen, daß wenig Aussicht besteht, das Relativitätsprinzip experimentell zu bestätigen; es kommen außer einigen astronomischen Beobachtungen nur die Messungen der Masse der Elektronen in Betracht. Doch darf man nicht vergessen, daß der Ausfall der negativen Versuche, wie der Michelsonsche Interferenzversuch und die Experimente zur Feststellung einer durch die Erdbewegung hervorgerufenen Doppelbrechung, nur durch das Relativitätsprinzip erklärt werden konnten.

4. Vortrag.

Die Erscheinungen der strahlenden Wärme, die den Inhalt der letzten drei Vorlesungen bilden sollen, haben einen besonderen Reiz sowohl wegen der Schönheit der Gesetze, denen sie gehorchen, als auch wegen der Schwierigkeiten, die ihrem Verständnis entgegenstehen. Es soll nur daran erinnert werden, wie schwer es ist, zu erklären, warum allmählich erhitzte Körper zuerst nur dunkle Wärmestrahlen entsenden und erst bei steigender Temperatur zu leuchten beginnen.

Zunächst werde eine einfachere Frage behandelt, die der schwarzen Strahlung. Diese wird sich innerhalb einer allseitig geschlossenen, innen geschwärzten Hülle ausbilden, die nichts enthält als Äther (um bei dieser alten Ausdrucksweise zu bleiben); ihre Eigenschaften hängen von der Temperatur der Hülle ab. Wir operieren im folgenden mit geradlinigen Strahlen, sehen also von der Diffraktion ab; dazu brauchen nur die Körperdimensionen groß zu sein gegen die Wellenlänge; ferner sehen wir zwei sich in derselben Richtung fortpflanzende Strahlen verschiedenen Ursprungs als inkohärent an.

Um die schwarze Strahlung zu analysieren, betrachten wir die durch ein Flächenelement $d\sigma$ innerhalb eines Kegels von der Öffnung $d\omega$ mit einer auf $d\sigma$ senkrechten Achse hindurchtretende Strahlung, deren Frequenz (Zahl der Schwingungen in der Zeit 2π) zwischen n und $n + dn$ liegt; dabei zerlegen wir die Schwingungen nach zwei auf der Achse von $d\sigma$ und aufeinander senkrechten Richtungen h und k und betrachten nur die h-Komponenten; wir nennen diesen Anteil die $d\sigma\, d\omega\, dn h$-Strahlung. Ihre Intensität, d. h. die in der Zeiteinheit durch $d\sigma$ hindurchtretende Energiemenge, möge

$$q\, d\sigma\, d\omega\, dn$$

betragen; dabei ist q nur von n und der Temperatur T, nicht von der Richtung des Elements $d\sigma$ abhängig.

Das Problem der schwarzen Strahlung ist, diese Funktion q zu bestimmen.

Durch sie ist nämlich der ganze Strahlungs-

zustand charakterisiert. So ist z. B. die Dichte der Energie der $d\omega\, dn\, h$-Strahlung

$$\frac{q}{c}\, d\omega\, dn.$$

Da die $d\omega\, dn\, k$-Strahlung denselben Wert liefert und bei der Integration über alle Richtungen $d\omega$ durch 4π zu ersetzen ist, so ist die gesamte Energie pro Volumeneinheit der dn-Strahlung

$$8\pi \frac{q}{c}\, dn.$$

Durch Integration nach n findet man daraus die Energiedichte der Gesamtstrahlung, die nur noch von der Temperatur T abhängt.

Die schwarze Strahlung kann auch in einem nicht von schwarzen, sondern von vollkommen spiegelnden Wänden gebildeten Hohlraum bestehen, wenn sie einmal darin zustande gekommen ist. Das beruht auf folgendem Satze (Fig. 3):

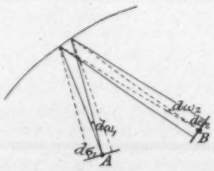


Fig. 3.

Es möge ein Strahlenkegel von der Öffnung $d\omega_1$ vom Punkte A ausgehen, an einem beliebig gekrümmten Spiegel reflektiert werden und im Punkte B das auf der Achse des Kegels senkrechte Flächenelement $d\sigma_2$ beleuchten; umgekehrt gehe von B ein Strahlenkegel von der Öffnung $d\omega_2$ aus und beleuchte das in A senkrecht auf ihm stehende Element $d\sigma_1$; dann ist immer

$$d\omega_1\, d\sigma_1 = d\omega_2\, d\sigma_2.$$

Dieser Satz, der aus dem Huygens'schen Prinzip folgt, zeigt, daß an einer bestehenden schwarzen Strahlung durch spiegelnde Wände nichts geändert werden kann. Übrigens behält der Satz auch in der Emissionstheorie des Lichtes Gültigkeit, wo er aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgt; er ist dann das genaue Analogon zu dem Satze der kinetischen Gastheorie, daß das kinetische Gleichgewicht der Moleküle durch glatte Wände nicht gestört wird.

Ferner kann die schwarze Strahlung bestehen, wenn sich ein vollkommen durchsichtiger und also nicht emittierender Körper (von beliebigem Brechungsvermögen) in dem Hohlraume befindet; nur ist der Strahlungszustand, wie schon Clausius und Kirchhoff fanden, innerhalb des Körpers anders als im Äther. Das allgemeinste Resultat für einen beliebigen anisotropen Körper (Kristall) lautet folgendermaßen.

Wir betrachten wieder einen Strahlenkegel $d\omega$ und verstehen unter h und k die beiden durch die Struktur des Kristalles vorgeschriebenen Schwingungsrichtungen. Wir fassen die erste derselben ins Auge und bemerken, daß zu jeder Strahlrichtung eine bestimmte Richtung der Wellennormale gehört, sodaß dem Strahlenkegel $d\omega$ ein bestimmter Kegel $d\omega'$ der Wellennormalen entspricht. Die Energiedichte der $d\omega\, dn\, h$-Strahlung hat den Wert

$$q\frac{c^2}{v^3}\, d\omega'\, dn,$$

wo v die Wellengeschwindigkeit ist.

Daß der hierdurch bestimmte Strahlungszustand des Kristalls mit dem oben charakterisierten des umgebenden Äthers im Gleichgewicht ist, kann man zeigen, indem man den Übergang der Strahlen aus dem einen Medium in das andere näher verfolgt. Dabei hat man einen Satz der Optik anzuwenden, der dem oben für den Fall der Reflexion besprochenen sehr verwandt ist und in einer Verallgemeinerung eines bekannten, von Lagrange herrührenden Theorems besteht. Zwischen zwei Punkten A, B in einem beliebigen homogenen oder inhomogenen anisotropen Körper mögen sich Strahlen mit in jedem Punkte bestimmter Schwingungsrichtung auf dem Wege L fortpflanzen, und es mögen die beiden von A und B ausgehenden Strahlenkegel mit der Achse L und von den Öffnungen $d\omega_1$ bzw. $d\omega_2$ bei Eintreffen in B bzw. A die Flächenelemente $d\sigma_2$ bzw. $d\sigma_1$ (Fig. 4) erfüllen, deren Normalen mit der Linie

Fig. 4.

L die spitzen Winkel ϑ_2 bzw. ϑ_1 bilden. Dann ist

$$\frac{u_1}{{v_1}^3}\cos\vartheta_1\, d\omega_1'\, d\sigma_1 = \frac{u_2}{{v_2}^3}\cos\vartheta_2\, d\omega_2'\, d\sigma_2,$$

wo u die Geschwindigkeit der Strahlen, v die der Wellen bedeuten, während $d\omega_1'$, $d\omega_2'$ die den Strahlenkegeln $d\omega_1$, $d\omega_2$ entsprechenden Kegel der Wellennormalen sind.

Wir fassen endlich den Fall ins Auge, daß ein beliebiger absorbierender und emittierender

Körper M sich in dem Hohlraum befindet. Dann gilt der mit dem Kirchhoffschen Gesetz zusammenhängende Satz, daß Gleichgewicht besteht, wenn in dem umgebenden Äther die oben betrachtete schwarze Strahlung existiert. Den Beweis, bei dem man sich um die Natur der Vorgänge im Innern des Körpers nicht zu kümmern braucht, kann man z. B. in folgender Weise führen.

Wir verbinden einen Punkt A der Hülle mit einem Punkt B des Körpers M durch eine Gerade; in irgendeinem Punkte P dieser Linie konstruieren wir ein zu ihr senkrechtes Flächenelement $d\sigma$, das P zum Mittelpunkt hat. Wir betrachten ferner einen Kegel $d\omega$ mit dem Scheitel P und der Achse PB, der von P aus auf den Körper M gerichtet ist. Die Verlängerung dieses Kegels, mit der Achse PA, bezeichnen wir mit $d\omega'$; h habe dieselbe Bedeutung wie oben. Die $d\sigma\, d\omega\, dn\, h$-Strahlung ist schwarz, weil sie von der Hülle herrührt, und ihre Intensität ist also $q\, d\sigma\, d\omega\, dn$. Es ist zu beweisen, daß auch die $d\sigma\, d\omega'\, dn\, h$-Strahlung schwarz ist, gleichgültig, welches ihr eigentlicher Ursprung ist; setzen wir letztere gleich $q'\, d\sigma\, d\omega'\, dn$, so ist also zu zeigen, daß

$$q = q'$$

ist.

Dieser Beweis möge nur angedeutet werden. Man betrachte zunächst nicht die dnh-Strahlung, sondern die gesamte Strahlung $d\sigma\, d\omega$, bzw. $d\sigma\, d\omega'$. Ihre Intensität sei in dem einen Fall $Q\, d\sigma\, d\omega$, in dem anderen $Q'\, d\sigma\, d\omega'$. Dann muß $Q = Q'$ sein, denn das Temperaturgleichgewicht darf nicht gestört werden, wenn das Element der Hülle, welches von $d\omega'$ getroffen wird, durch einen sphärischen vollkommenen Spiegel ersetzt wird, dessen Krümmungsmittelpunkt in P liegt. Das Anbringen dieses Spiegels hat nämlich zur Folge, daß der Körper M, statt der Strahlung $Q\, d\sigma\, d\omega$, die Strahlung $Q'\, d\sigma\, d\omega'$ erhält. Da nun an der Emission von M nichts geändert wird, so liegt es nahe, die Bedingung für die Erhaltung des Gleichgewichtes darin zu sehen, daß $Q = Q'$ ist. Um diesen Beweis gegen jeden Einwand zu sichern, und auf die Intensität q der monochromatischen Strahlung von bestimmter Schwingungsrichtung auszudehnen, sind jetzt nur ähnliche Kunstgriffe nötig, wie sie Kirchhoff an der entsprechenden Stelle seines Beweises anwendet.

Von der schwarzen Strahlung kennt man noch zwei Eigenschaften, die sich ohne näheres Eingehen auf die Natur der emittierenden und absorbierenden Körper beweisen lassen und die durch das Stephan-Boltzmannsche Gesetz und das Wiensche Verschiebungsgesetz formuliert werden. Diese Gesetze, deren Ableitung bekannt genug ist, bestimmen die gesuchte Funktion $q(n, T)$ bis zu einem gewissen Grade. Führt man zur Vereinfachung der Formeln die Größe

$$\frac{q}{c} = \varepsilon$$

ein, so ergibt sich nämlich

$$\varepsilon = n^3 f\left(\frac{T}{n}\right),$$

und die Aufgabe läuft jetzt darauf hinaus, die Funktion eines Argumentes f zu bestimmen.

$\varepsilon\, d\omega\, dn$ ist die Energie pro Volumeinheit der $d\omega\, dnh$-Strahlung. Mit dieser wäre auch die Entropie der Volumeinheit, $\eta\, d\omega\, dn$, bekannt, die mit ihr durch die thermodynamische Gleichung (η Funktion von ε und n)

$$\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{T}$$

zusammenhängt; daraus ergibt sich für η der Ausdruck

$$\eta = n^2 \psi\left(\frac{\varepsilon}{n^3}\right).$$

Man kann die Entropie eines Strahlenbüschels nicht nur im Äther, sondern auch im Innern durchsichtiger materieller (isotroper oder anisotroper) Körper angeben. Die betreffende Formel läßt sich dadurch ableiten, daß man eine kontinuierlich vom Äther in den Körper überführende Grenzschicht annimmt, deren Dicke groß ist gegen die Wellenlänge; denn dann ist das reflektierte Licht zu vernachlässigen, der Übergang der Strahlen ist umkehrbar, also bleibt dabei die Entropie ungeändert.

In emittierenden und absorbierenden Körpern wird es sich darum handeln, denjenigen Teil der Strahlung, der von außen her durch ein Volumelement hindurchgeschickt wird, zu trennen von der in dem Element erzeugten Strahlung selbst. Da wir die wirkliche Ursache der Strahlung nicht kennen, so werden wir eine fiktive Ursache einführen können, derart, daß der von ihr herrührende Strahlungszustand mit dem wirklich vorhandenen übereinstimmt. Man kann diese fiktiven Strahlungserreger „elektromotorische Kräfte“ nennen in Anlehnung an die Bezeichnung derjenigen Ursachen, die das Entstehen eines elektrischen Stromes bewirken. Überhaupt soll jetzt die Strahlung vom Standpunkt der elektromagnetischen Lichttheorie aufgefaßt werden, deren Grundgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\, \dot{\mathfrak{E}},$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\, \dot{\mathfrak{H}}$$

lauten. In einem beliebigen (anisotropen) Medium sind die Komponenten von $\mathfrak{B}$ lineare Funktionen der Komponenten von $\mathfrak{H}$. Drückt man die zeitliche Veränderlichkeit aller vorkommenden Größen entsprechend einer monochromatischen Lichtwelle durch den Faktor e^{int} aus, so bestehen auch zwischen den Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{C}$ lineare Relationen, aber mit komplexen Koeffizienten, die noch von n abhängen; wir setzen

$$E_x + \mathfrak{E}_x = p_{11}\mathfrak{C}_x + p_{12}\mathfrak{C}_y + p_{13}\mathfrak{C}_z,$$
$$E_y + \mathfrak{E}_y = p_{21}\mathfrak{C}_x + p_{22}\mathfrak{C}_y + p_{23}\mathfrak{C}_z,$$
$$E_z + \mathfrak{E}_z = p_{31}\mathfrak{C}_x + p_{32}\mathfrak{C}_y + p_{33}\mathfrak{C}_z;$$

dabei sei

$$p_{23} = p_{32},\ p_{31} = p_{13},\ p_{12} = p_{21}.$$

Die Größen E_x, E_y, E_z sind Null, wenn keine Emission vorhanden ist; strahlt der Körper aber selbst aus, so sind ihre reellen Teile die Komponenten jener „elektromotorischen Kraft", die wir als fiktive Ursache der Strahlung annahmen.

Die reellen Teile der Koeffizienten p seien a_{11}, a_{12}, ... a_{33}; zwischen diesen gelten die Gleichungen

$$a_{23} = a_{32},\ a_{31} = a_{13},\ a_{12} = a_{21}.$$

Die pro Volumeinheit entwickelte Wärme beträgt:

$$a_{11}\mathfrak{C}_x^2 + \ldots + 2a_{12}\mathfrak{C}_x\mathfrak{C}_y + \ldots$$

Man kann nun immer neue Koordinatenachsen einführen derart, daß diese quadratische Form die einfache Gestalt

$$a_1\mathfrak{C}_x^2 + a_2\mathfrak{C}_y^2 + a_3\mathfrak{C}_z^2$$

annimmt; die Richtungen der drei neuen Koordinatenachsen nennen wir Hauptrichtungen, sie variieren im allgemeinen nicht nur von Punkt zu Punkt, sondern können in einem Volumelement noch von der Frequenz n abhängen.

Es läßt sich jetzt folgendes beweisen:

Um die wirklich vorhandene Strahlung hervorzubringen, muß man für ein Frequenzintervall n, $n + dn$ in jedem (makroskopischen) Volumelement dS in den drei Hauptrichtungen elektromotorische Kräfte wirken lassen, deren Amplituden durch

$$\frac{4\pi c}{n}\sqrt{\frac{2c\varepsilon a_1\, dn}{dS}},\ \text{etc.}$$

gegeben sind und deren Phasen voneinander unabhängig sind; auch darf zwischen den elektromotorischen Kräften in den verschiedenen Volumelementen keine Kohärenz bestehen.

Damit ist die Eigenstrahlung von der fremden Strahlung getrennt, da bei der letzteren die elektromotorischen Kräfte nicht wirksam sind.

Der Beweis, daß, wenn die angegebenen elektromotorischen Kräfte in einem System bestehen, in diesem Temperaturgleichgewicht herrscht, beruht auf einem Reziprozitätssatze des Inhalts: Wirken in zwei Volumelementen dS, dS', in den Hauptrichtungen h, h' elektromotorische Kräfte, deren Amplituden sich umgekehrt wie dS, dS' verhalten, so besteht Gleichheit zwischen den Amplituden der Ströme, welche die erste Kraft in P' in der Richtung h' und die zweite in P in der Richtung h hervorruft.

Durch diese Auffassung der Strahlung als elektromagnetische Wellen lassen sich die erwähnten Sätze der Wärmestrahlung auch ausdehnen auf die Fälle, wo die Diffraktion zu berücksichtigen ist.

Eine Bemerkung ist noch anzuknüpfen an den Umstand, daß in dem Ausdruck der elektromotorischen Kräfte die unendlich kleinen Größen dn und dS unter dem Wurzelzeichen stehen. Hieran erkennt man den fiktiven Charakter dieser Kräfte, denn es hängt ihr Wert noch von der gewählten Größe der Volumelemente dS ab. Er ist so gewählt, daß die ausgestrahlte Energie proportional mit dS wird. Dazu muß nämlich die Amplitude der erregten Schwingungen proportional $\sqrt{dS}$ sein. Da sie nun einerseits dem Volumenelement und andererseits der elektromotorischen Kraft proportional ist, so muß letztere umgekehrt wie $\sqrt{dS}$ variieren. Man kann dies noch in folgender Weise erläutern. Würden die Bewegungsursachen in allen Punkten eines Volumelements dS kohärent sein, so müßte die durch die Schwingungsamplitude gemessene Wirkung des Volumelements proportional seiner Größe dS sein. Nimmt man aber an, daß es schon in einem einzelnen Volumelement sehr viele inkohärente Bewegungsursachen gibt, so zeigt eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung, daß dann in der Tat jene Gesamtwirkung des Elements proportional $\sqrt{dS}$ sein muß. Wirken nämlich N Ursachen von gleicher Wahrscheinlichkeit in verschiedener Richtung, so heben diese sich nicht genau auf, sondern es ist am wahrscheinlichsten, daß die eine oder die andere Richtung um $\sqrt{N}$ überwiegen wird. Verteilen wir im Volumelement dS also eine seiner Größe proportionale Anzahl von elektromotorischen Kräften in willkürlicher Phase, so wird die resultierende Amplitude proportional $\sqrt{dS}$ sein. Tatsachen dieser Art sind es, die uns zur molekularen Auffassung der Materie geradezu zwingen.

Es werde noch kurz die Frage besprochen, was man über die schwarze Strahlung im Äther mit Hilfe des Relativitätsprinzips erfahren kann.

Wir denken uns die spiegelnde Hülle in Bewegung und führen ein mitbewegtes Bezugssystem x', y', z', t' ein; dann muß es einen Zu-

stand der schwarzen Strahlung geben, wo die Feldstärken $\mathfrak{d}', \mathfrak{h}'$ dieselben Funktionen von x', y', z', t' sind, wie in dem Falle, daß die Hülle ruht, $\mathfrak{d}, \mathfrak{h}$ von x, y, z, t abhingen.

Wenn die Hülle ruht, ist die resultierende elektromagnetische Bewegungsgröße der Strahlung natürlich Null. Wenn sie sich aber bewegt, bemerkt ein nicht mitbewegter Beobachter eine resultierende Bewegungsgröße in der Richtung der Translation; wegen der Anwesenheit der schwarzen Strahlung muß er, um die Translation hervorzubringen, eine der Beschleunigung proportionale Kraft aufwenden, die schwarze Strahlung hat also träge Masse. Wie das zustande kommt, ist einfach zu verstehen, wenn man der Hülle die Form eines Parallelepipeds gibt und die Vorgänge während der Beschleunigung ins Auge faßt; dann zeigt sich, daß der Strahlungsdruck auf die vordere und die hintere Wand nicht gleich ist, weil während der Zeit, die ein Wellenzug zum Durchlaufen des Parallelepipeds in der Bewegungsrichtung braucht, sich die Geschwindigkeit der Wände geändert hat; auf diese Weise entsteht eine der Geschwindigkeitsänderung, d. h. der Beschleunigung proportionale Resultierende.

Zum Schluß soll ein mathematisches Problem Erwähnung finden, das vielleicht bei den anwesenden Mathematikern Interesse erwecken wird. Es stammt aus der Strahlungstheorie von Jeans. In einer vollkommen spiegelnden Hülle können sich stehende elektromagnetische Schwingungen ausbilden, ähnlich den Tönen einer Orgelpfeife; wir wollen nur auf die sehr hohen Obertöne das Augenmerk richten. Jeans fragt nach der auf ein Frequenzintervall dn fallenden Energie. Dazu berechnet er zuerst die Anzahl der zwischen den Frequenzen n und $n + dn$ liegenden Obertöne und multipliziert die Zahl dann mit der zu jeder Frequenz gehörigen Energie, die nach einem Satze der statistischen Mechanik für alle Frequenzen gleich ist. Auf diese Weise bekommt er in der Tat das richtige Gesetz der Strahlung für langwellige Wärmestrahlen.

Hierbei entsteht das mathematische Problem, zu beweisen, daß die Anzahl der genügend hohen Obertöne zwischen n und $n + dn$ unabhängig von der Gestalt der Hülle und nur ihrem Volumen proportional ist. Für mehrere einfache Formen der Hülle, wo sich die Rechnung durchführen läßt, wird der Satz in einer Leidener Dissertation bestätigt werden. Es ist nicht zu zweifeln, daß er allgemein, auch für mehrfach zusammenhängende Räume, gültig ist. Analoge Sätze werden auch bei andern schwingenden Gebilden, wie elastischen Membranen und Luftmassen etc., bestehen.

5. Vortrag.

Wir können jetzt die Hauptschwierigkeit ins Auge fassen, auf die man bei der Aufstellung einer Strahlungsformel stößt. Sie besteht darin, daß nach den gewöhnlichen Vorstellungen der Äther ein Kontinuum ist und daher unendlich viele Freiheitsgrade besitzt. Nun gibt es einen (im letzten Vortrag schon erwähnten) Satz der statistischen Mechanik, der folgendes besagt: Wenn zwei Gebilde, denen die Anzahlen a und b der Freiheitsgrade zukommen, im Wärmegleichgewicht sind, so verteilt sich die kinetische Energie auf sie im Verhältnis $a : b$. Dieser Satz gilt für alle Systeme, die den Gleichungen der Mechanik, oder, was dasselbe ist, dem Hamiltonschen Prinzip gehorchen. Da sich nun, wie in der ersten Vorlesung ausgeführt wurde, das Hamiltonsche Prinzip auch in der Elektronentheorie aufstellen läßt, wobei die elektrische Energie der potentiellen, die magnetische der kinetischen entspricht, so gehört der Äther zu den Systemen, wo jener Satz gilt; die Anzahl seiner Freiheitsgrade ist aber unendlich, so daß er, wenn er mit einem ponderablen Körper im Wärmegleichgewicht ist, alle Energie aufnehmen muß. Dann würde im Gleichgewicht die Temperatur des ponderablen Körpers absolut Null sein, und das ist offenbar unmöglich. Es muß in Wirklichkeit ein endliches Verhältnis zwischen der Energie des Äthers und der Materie im Gleichgewicht bestehen, aber man kann das von den angenommenen Grundlagen aus nicht erklären.

Es muß also eine ganz neue Hypothese gemacht werden: das Hamiltonsche Prinzip darf auf die Strahlung nicht anwendbar sein. Die Hypothese soll nun in der Einführung des von Planck ersonnenen Energieelementes bestehen. In der Planckschen Theorie wird angenommen, daß es in den ponderablen Körpern „Resonatoren" gibt, die den Austausch der Energie zwischen den Molekülen und dem Äther vermitteln, und über diese Resonatoren wird die Annahme gemacht, daß sie die Energie nicht in unendlich kleinen Abstufungen, sondern nur in endlichen Mengen, den Energieelementen, aufnehmen können. Die Größe dieser Elemente hängt nach Planck noch von der Schwingungszahl (pro Zeiteinheit) ν ab und ist gleich $h\nu$ zu setzen, wo h eine Konstante ist; danach zeigen Resonatoren von großer Schwingungszahl eine besondere Habgier nach Energie (wobei es ihnen dann beim Austausch der Energieelemente

geschehen kann, daß sie besonders wenige davon bekommen). Aus dieser Annahme ergibt sich nun in der Planckschen Theorie die Energiedichte der schwarzen Strahlung zwischen den Frequenzen ν und $\nu + d\nu$ folgendermaßen:

$$\frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu;$$

die Konstante k hängt mit der mittleren kinetischen Energie eines Gasmoleküls zusammen.

Eine Ableitung dieser Formel soll im letzten Vortrage gegeben werden, während heute die mannigfachen Konsequenzen und Verallgemeinerungen der Hypothese der Energieelemente besprochen werden mögen.

Die Herren Einstein und Stark sind nämlich über Planck hinausgegangen und nehmen die Energieelemente nicht nur bei der Aufnahme und Abgabe der Energie durch die Resonatoren an, sondern schreiben ihnen auch selbständige Existenz im Äther zu.

Von den Erscheinungen, die sich hierdurch erklären lassen, wollen wir auf den lichtelektrischen Effekt näher eingehen. Bekanntlich entweichen aus hochpolierten Metallplatten bei Bestrahlung mit ultraviolettem Lichte Elektronen von ganz bestimmter Geschwindigkeit. Die nähere Untersuchung der Erscheinung durch Lenard und E. Ladenburg ergab, daß die Geschwindigkeit der Elektronen nur von der Frequenz, nicht von der Intensität des Lichtes abhängt, während die Anzahl der erzeugten Elektronen von der Lichtintensität beeinflußt wird. Woher rührt nun die Geschwindigkeit der Elektronen? Man wird zunächst an die Temperaturbewegung der Elektronen im Metall denken. In dieser Hinsicht ist bemerkenswert, daß nach den Untersuchungen von Richardson die bei hohen Temperaturen ohne Bestrahlung aus dem Metall entweichenden Elektronen eine kinetische Energie von derselben Größenordnung wie die der Moleküle haben; dies zeigt sich darin, daß Richardson aus seinen Messungen den Wert der Gaskonstanten ableiten konnte. Was den lichtelektrischen Effekt betrifft, wäre es nun denkbar, daß das Licht nur auslösend wirkt und daß die in Freiheit gesetzten Elektronen, bevor sie das Metall verlassen, infolge der Wärmebewegung ihre Geschwindigkeit erhalten. Aber die beobachteten Zahlen sind dieser Auffassung ungünstig. Denn die kinetische Energie der lichtelektrischen Elektronen ist schon unter gewöhnlichen Umständen fünfmal so groß, als der Wärmebewegung entspricht, ferner hat Ladenburg gezeigt, daß die Geschwindigkeit bis 800° unabhängig von der Temperatur ist.

Will man daran festhalten, daß dem Licht nur eine auslösende Wirkung zukommt, so muß man sich nach andern Ursachen für die Geschwindigkeit umsehen, indem man etwa die Aussendung der lichtelektrischen Elektronen mit der Ausstrahlung der β-Teilchen des Radiums in Parallele setzt.

Eine davon ganz verschiedene Auffassung ist die, daß die Energie der Elektronen direkt aus der des Lichtes stammt. Einstein wendet auf diesen Vorgang seine Lichtquantenhypothese an. Ein einzelnes Lichtquantum hat genügende Energie, ein Elektron aus dem Metall zu befreien und ihm seine Geschwindigkeit zu verleihen. Daraus folgt, daß auch schwaches Licht den Elektronen dieselbe Geschwindigkeit verleihen kann, wie starkes von derselben Frequenz, denn bei schwachem Licht wird nur die Anzahl der Quanten und somit die Anzahl der erzeugten Elektronen kleiner, während jedes Quantum seine Energie an ein einzelnes Elektron abgibt. Auch die numerischen Werte sind mit dieser Hypothese vereinbar. Setzt man nämlich nach Planck

$$h = 6{,}5 \times 10^{-27}$$

und nimmt für ultraviolettes Licht

$$\nu = 1{,}03 \times 10^{15},$$

so erhält man

$$h\nu = 6{,}7 \times 10^{-12} \text{ Erg};$$

aus Geschwindigkeiten, wie sie bei den Messungen von Lenard häufig vorkamen, ergibt sich andrerseits die Energie eines Elektrons zu

$$3 \times 10^{-13} \text{ Erg},$$

sie ist also erheblich kleiner als das Energieelement. Daher hat ein Quantum ausreichende Energie, um nicht nur dem Elektron seine Geschwindigkeit zu geben, sondern auch, um bei seiner Loslösung Arbeit zu leisten. Bezeichnen wir diese Arbeit mit P und die der Austrittsgeschwindigkeit entsprechende Spannungsdifferenz mit Π, so muß

$$h\nu = \Pi e + P$$

sein, wo e die Elektronenladung ist. Hier wird P nicht von ν, sondern nur von dem benutzten Körper abhängen. Es ergibt sich also eine lineare Gleichung zwischen ν und Π, und auch diese hat das Experiment bestätigt.

Trotzdem hält der Redner die Lichtquantenhypothese für unmöglich, wenn die Quanten als völlig inkohärent angesehen werden, eine Annahme, die offenbar die natürlichste ist und die auch Planck macht.

Die Unmöglichkeit der inkohärenten Quanten folgt aus der Betrachtung der Interferenzerscheinungen. Lummer und Gehrcke haben nämlich noch Interferenzen bei 2 Millionen Wellenlängen Phasendifferenz beobachtet; das entspricht bei gelbem Licht einer Länge von einem

Meter. Wenn jedes Quantum für sich deutliche Interferenzen geben soll, müßte es sich also in der Fortpflanzungsrichtung über eine solche Länge erstrecken. Aber auch die seitliche Ausdehnung der Quanten müßte beträchtlich sein; das ergibt sich aus der Beugungstheorie der optischen Instrumente. Würde ein Lichtquantum seitlich z. B. nur 1 qdcm bedecken, so hätte es offenbar keinen Sinn, große Fernrohrobjektive herzustellen, denn es würde für jedes Quantum nur ein Teil der Objektivöffnung bei der Bilderzeugung benützt werden; andrerseits ist es wohl bekannt, daß man durch große Objektive die Deutlichkeit der Bilder steigern kann. Also müßte ein Lichtquantum mindestens so groß sein, wie die größten Fernrohrobjektive, und da es unwahrscheinlich ist, daß sich das Volumen des Quantums nach unsern Instrumenten richtet, wird man es sich noch erheblich größer vorzustellen haben. Dann könnten aber durch eine kleine Öffnung, etwa die Pupille des Auges, nur Teile von Quanten eindringen und da nach der Hypothese bei der Absorption auf der Netzhaut nur volle Quanten aufgenommen werden könnten, müßten die Teile sich dabei wieder zu ganzen Quanten zusammenfügen. Übrigens zeigt schon die Betrachtung der einfachsten Interferenzerscheinungen, wie die Newtonschen Ringe, daß die Quanten jedenfalls teilbar sein müßten, weil dabei der Strahl durch Reflexion in zwei Teile zerlegt wird, die verschiedene Wege gehen und schließlich zur Interferenz gelangen.

Wegen dieser Schwierigkeiten hat Stark die Hypothese abgeändert: die Lichtquanten sollen regelmäßige Aggregate bilden, in denen Kohärenz herrscht. In der Tat ist dieser Weg gangbar, doch müßten viele Resultate der alten Optik fallen gelassen werden, wenn man daran festhalten will, daß die einzelnen Quanten nur nebeneinander existieren können und unzerstörbar sind. Teilt sich, etwa bei der Reflexion an einer ebenen Fläche, ein Quantenbündel in Teile, deren jeder das Volumen des ursprünglichen Bündels hat, so müßte das Gefüge des Quantenaggregats im reflektierten und im gebrochenen Licht lockerer geworden sein, indem einige Quanten hindurchgehen, andre zurückgeworfen werden. Es entstehen dabei Fragen ähnlich wie bei der Newtonschen Emissionstheorie.

Redner möchte den heuristischen Wert dieser Hypothese zwar nicht bestreiten, aber die alte Theorie so lange als möglich verteidigen.

Stark hat auch Versuche darüber angestellt, wie die Länge eines solchen Quantenaggregats von der Lichtquelle abhängt; dazu hat er Interferenzen bei hohen Gangunterschieden von Licht verschiedener Intensität beobachtet. Doch ist es nicht notwendig, bei der Deutung dieser Versuche an Quanten zu denken; auch in der gewöhnlichen Lichttheorie werden Züge regelmäßiger Wellen nur eine gewisse, möglicherweise mit dem Ursprung des Lichtes veränderliche Länge haben.

Es ist noch zu erwähnen, daß J. J. Thomson durch die Betrachtung der lichtelektrischen Effekte zu einer der Quantentheorie ähnlichen Hypothese geführt worden ist; da bei einer glatten Front der Lichtwelle die an eine Stelle gelangende Energie in schwachem Lichte nicht ausreichen würde, um einem Elektron seine Geschwindigkeit zu geben, nimmt er die Wellenfront als ungleichmäßig an, indem die Energie stellenweise angehäuft ist (patches of light).

Aus dem Gesagten geht hervor, daß die Quantenhypothese besonders durch die Erscheinungen gestützt wird, bei denen es den Anschein hat, daß zur Hervorbringung des Effekts in einen bestimmten Punkt eines Körpers eine endliche Energiemenge gebracht werden muß. So wird man auf die Frage geführt: Kann ein gewöhnliches, nicht aus Quanten bestehendes Lichtbündel eine endliche Menge Energie, von der Größe eines Energieelementes an ein Elektron abgeben?

In dem Lichtbündel bestehe in der Richtung der x-Achse die elektrische Kraft $a \cos nt$. Diese wirke auf ein Elektron von der Masse m und der Ladung e, das durch eine quasielastische Kraft vom Betrage f an seine Gleichgewichtslage gebunden sei. Dann lautet die Bewegungsgleichung des Elektrons (die übrigens den Mathematikern noch manche Frage darböte):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -fx + ea \cos nt + \frac{e^2}{6\pi c^3} \frac{d^3 x}{dt^3};$$

das letzte Glied rührt von der Strahlungsdämpfung her. Wir wollen es so einrichten, daß das Elektron möglichst viel Energie dem Lichtstrahl entnehmen kann; das wird natürlich der Fall sein, wenn Resonanz besteht, d. h. wenn

$$f = m n^2.$$

Dann erreicht das Elektron schließlich eine Amplitude, die der des einfallenden Lichtes proportional ist; die Energie des Elektrons wird gleich der in einem gewissen Volumen befindlichen Energie des auffallenden Lichtbündels, und unter Benützung der Formel für die elektromagnetische Masse des Elektrons (vgl. 1. Vortrag S. 1236) wird dieses Volumen gleich

$$\frac{3\lambda^4}{8\pi^3 R}.$$

Es fragt sich, ob diese Energie den Wert des Planckschen Energieelements erreichen kann.

Damit dies der Fall ist, muß die Intensität, wie man berechnen kann, für gelbes Licht in absolutem Maße

$$J = 93000$$

pro sec und cm² betragen. Nun ergibt sich aus der Solarkonstanten die Intensität in starkem Sonnenlichte zu

$$J = 2000000.$$

Wäre das Sonnenlicht monochromatisch, so ginge es also. Aber einmal ist es das nicht, sodann kann man die Beobachtungen mit ungeheuer viel schwächerem Lichte machen, etwa mit der Intensität $J = 2$. Von einem gewöhnlichen Lichtbündel wird das Elektron also nicht die erforderliche Lichtmenge erhalten, um daraus ein Energieelement zu absorbieren.

Es liegt das offenbar an dem Vorhandensein eines Widerstandes; ohne ihn könnte das Elektron natürlich beliebig viel Energie aufspeichern. Dieser Widerstand, der mit der Ausstrahlung zusammenhängt, braucht nun aber unter Umständen nicht mit seinem vollen Werte wirksam zu sein, kann sogar ganz fehlen. Um dies einzusehen, wollen wir eine ganz andere Frage ins Auge fassen.

Wenn Licht die Moleküle eines Körpers trifft, wird es dabei gerade so wie in einer Staubwolke zerstreut und dabei geschwächt (Extinktionskoeffizient); dies hängt mit dem oben eingeführten Widerstande gegen die Elektronenschwingungen eng zusammen. Für die Extinktion in der Luft hat Rayleigh eine Formel angegeben, und diese bekommt man gerade wenn man für jedes Molekül den oben angeschriebenen Widerstand annimmt. Indes muß man im allgemeinen bei der Berechnung der Zerstreuung die Wechselwirkung der Moleküle beachten. Dies geht schon daraus hervor, daß, wenn in einer gegen die Wellenlänge kleinen Entfernung zwei Elektronen in parallelen Bahnen und mit gleicher Frequenz und Phase schwingen, die von beiden ausgestrahlte Energie nicht doppelt, sondern viermal so groß wird, als wenn beide ohne gegenseitige Beeinflussung schwängen. Für jedes Elektron muß man also, um die Schwingungen in Gang zu halten, die doppelte Arbeit aufwenden, es erleidet den doppelten Widerstand. Sind umgekehrt die Phasen beider Elektronen entgegengesetzt, so findet keine Ausstrahlung statt, also ist auch kein Widerstand vorhanden. Betrachtet man nun die Fortpflanzung des Lichtes in einem System von Molekülen, so findet man, daß bei regelmäßiger Lagerung, wie in einem Kristall, kein Widerstand und keine Zerstreuung vorhanden sein werden. Daß in der Luft das Licht zerstreut wird, liegt an der unregelmäßigen Anordnung der Moleküle. Diese ergibt im Mittel für jedes Molekül denselben Widerstand, den ein vereinzeltes Elektron erfahren würde. Es bestehen aber Abweichungen von diesem Mittelwert und es kann in einem bestimmten Augenblick Teilchen geben, für welche der Widerstand größer oder kleiner als der genannte Wert ist. Für einzelne Moleküle kann er so gut wie Null, oder sogar negativ sein.

Würde der Widerstand ganz fehlen und würde volle Resonanz bestehen, so würde die Amplitude des Elektrons ins Unendliche wachsen proportional der Zeit t, die Intensität also proportional t^2. Nun folgen sich aber die Lichtwellen nicht unbegrenzt lange regelmäßig aufeinander; beachtet man dies, so bleibt die unendliche Anhäufung der Energie doch bestehen, nur geht sie langsamer vor sich (proportional t). Berechnet man nun die Zeiten, die nötig sind, um ein Lichtquantum im Elektron aufzuhäufen, so ist das Resultat keineswegs günstig für die alte Theorie. Denn wenn ein regelmäßiger, monochromatischer Wellenzug von der Intensität J auffällt, dann ergibt sich für die Anzahl der Schwingungen, die nötig sind, damit die Energie des Elektrons den Wert des Planckschen Energieelements erhält, der Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{2hc^2}{3\pi\lambda^3 RJ}};$$

das ist bei starkem Sonnenlicht mehr als eine Million. Da sich nun höchstens einige Millionen regelmäßiger Schwingungen folgen, so werden in Wirklichkeit, vor allem bei schwachem Licht, die Zeiten, die zur Aufnahme eines Quantums nötig sind, recht groß werden.

Allerdings könnte man berücksichtigen, daß auch ohne Annahme von Lichtquanten im Lichtbündel stellenweise Unregelmäßigkeiten der Intensität, Anhäufungen der Energie bestehen werden. Dieser Punkt ist noch weiter zu untersuchen, aber vorläufig müssen wir anerkennen, daß die betrachteten Erscheinungen ohne Annahme von Lichtquanten der Erklärung große Schwierigkeiten bieten.

Zum Schlusse möge eine etwas gewagte Hypothese über die Planckschen Energieelemente besprochen werden, die Herr Erich Haas aufgestellt hat. Es kommt dabei nur die Größenordnung in Betracht. Man kann, allerdings etwas nachträglich, einen Gedankengang konstruieren, durch den man einigermaßen natürlich auf diese Hypothese geführt wird. Im Jahre 1885 stellte Exner fest, daß der Brechungsexponent eines Gases mit der Raumerfüllung desselben zusammenhängt. Diese Tatsache würde sich theoretisch ergeben, wenn man die Moleküle als leitende Kugeln betrachten dürfte. Es möge sich eine leitende Kugel vom

Volumen v in einem homogenen elektrischen Felde E befinden; dann nimmt sie das elektrische Moment

$$3Ev$$

an. Sind in einem Raume N Kugeln verteilt, so wird in dem Raume die Polarisation

$$3EvN$$

bestehen (wenn man zur Vereinfachung von einer Wechselwirkung der Kugeln absieht). Daraus ergibt sich die Dielektrizitätskonstante zu

$$1 + 3vN;$$

der Brechungsexponent μ ist die Quadratwurzel daraus, also angenähert

$$\mu = 1 + \frac{3}{2} vN.$$

Dieser Wert stimmt, wie Exner bemerkt hat, der Größenordnung nach mit den Messungen überein. So hat z. B. für Argon der Brechungsexponent bei 0° und 76 cm Hg den Wert 1,00028. Daraus würde mit Hilfe unserer Formel $Nv = 0{,}00018$ folgen; nun ist Nv der Teil des Gasraumes, der von den Molekülen eingenommen wird, und für diesen findet man nach der van der Waalsschen Theorie aus den kritischen Daten 0,00036, was der Größenordnung nach stimmt.

Nun sind die Gasmoleküle gewiß keine leitenden Kugeln und es erscheint als ein Rätsel, daß sie sich trotzdem so verhalten. Dieses Rätsel hat J. J. Thomson gelöst durch seine kühne Hypothese über die Struktur des Atoms. Er nimmt an, das Atom bestehe aus einer positiv geladenen Kugel mit gleichförmig verteilter Ladung, in deren Innern die negativen Elektronen unter der Anziehung der positiven Kugel und ihrer gegenseitigen Abstoßung stabile Gleichgewichtslagen finden. Bringt man ein solches Atom in ein elektrisches Feld E, so bleibt die positive Ladung, die als unveränderlich betrachtet wird, überall gleich dicht, alle Elektronen aber werden in der Richtung der Kraft E um gleiche Strecken verschoben. Ist ϱ die Dichte der positiven Ladung, so wird jedes Elektron um $\frac{3E}{\varrho}$ verschoben, bringt also das Moment $\frac{3Ee}{\varrho}$ hervor; sind α Elektronen vorhanden, so erzeugen sie zusammen das Moment $\frac{3\alpha Ee}{\varrho}$. Da nun bei einem neutralen Atom αe gleich der Ladung ϱv der positiven Kugel ist, so ergibt sich die Polarisation jedes Atoms zu $3Ev$, wie bei einer leitenden Kugel.

Jetzt ziehen wir eine andere Vorstellung heran. Lenard hat sich bei seinen Untersuchungen über die Phosphoreszenz, die ja in einer Energieaufspeicherung besteht, folgende Anschauung gebildet. Es wird durch das Licht aus dem Molekül des Körpers ein Elektron entfernt (daß solches statthat, dafür sprechen auch die lichtelektrischen Erscheinungen). Dabei erhält das Elektron potentielle Energie gegen das Molekül, und das ist eben die aufgespeicherte Lichtenergie. Die spätere Ausstrahlung erfolgt bei der Rückkehr des Elektrons, die unter Schwingungen vor sich geht. Es ist dies der einzige Fall, wo man den sonst so „dunklen" Prozeß der Lichtausstrahlung einigermaßen versteht.

Diese Vorstellungen, die Thomsonsche Kugel und die Lenardsche Theorie der Phosphoreszenz verknüpfen wir nun und gelangen so zu der Hypothese von Haas.

Wird ein Thomsonsches Atom von Lichtschwingungen getroffen, so werden die Elektronen in Schwingungen versetzt (Resonatoren). So lange ein Elektron aber in der positiven Kugel bleibt, findet keine wirkliche Absorption statt, während es wohl zur Dispersion und Zerstreuung beitragen kann. Schließlich kann es vorkommen, daß das Elektron die Kugel ganz verläßt und der freien Wärmebewegung zum Opfer fällt; dann träte wirkliche Absorption ein. Damit haben wir ein Gebilde vor uns, das nur bestimmte, endliche Mengen von Energie, Energieelemente, aufnehmen kann. Man kann am Argon diese Energie der Größenordnung nach berechnen, da man alle nötigen Daten, z. B. das Volumen eines Moleküls, die wirkliche Eigenschwingungszahl ν etc. kennt; man erhält:

$$h = 4{,}0 \times 10^{-27},$$

was mit dem Werte der Planckschen Konstante der Größenordnung nach übereinstimmt.

Doch stehen dieser Hypothese große Schwierigkeiten entgegen. So muß in der Planckschen Strahlungstheorie ein Resonator auch mehrere Energieelemente aufnehmen können, d. h. es müßten mehrere Elektronen die positive Kugel verlassen können; dabei würden für jedes Elektron sich leicht etwas verschiedene Energiewerte ergeben und die Plancksche Konstante h könnte nur einen Mittelwert daraus darstellen. Ferner müßte h unabhängig von dem Körper sein. Dann ist noch folgendes zu bedenken: Bei der Emission von Licht müßte ein Elektron, nicht infolge einfallender Schwingungen, sondern wegen der Wärmebewegung, die Kugel verlassen und dann unter Schwingungen in sie zurückkehren. Bei der Absorption müßten umgekehrt, wie gesagt, vor dem Austritt des Elektrons Schwingungen stattfinden, bei der Rückkehr aber nicht. Man muß nämlich annehmen,

daß die aus den Atomen herausgetretenen Elektronen wieder in dieselben zurückkehren; fände dies mit Schwingungen statt, so würde die dem Lichte entnommene Energie wieder als Licht ausgestrahlt werden. Daß man ohne solche ziemlich sonderbar klingende Annahmen die Aufnahme und Abgabe des Lichtes in vollen Quanten nicht erklären kann, kann uns übrigens nicht wundern; die Annahmen müssen eben die Ungültigkeit des Hamiltonschen Prinzipes für diese Vorgänge einschließen und sich also von den gewöhnlichen mechanischen Vorstellungen ziemlich weit entfernen.

Wie schwierig das Verständnis der Emission und Absorption des Lichtes ist, ersieht man auch daraus, daß man in der gewöhnlichen Absorptionstheorie einen Widerstand von andrer Art als die in den obigen Gleichungen vorkommende Strahlungsdämpfung annehmen muß, der von Helmholtz proportional $\frac{dx}{dt}$ angenommen wurde und der, wie z. B. auch Voigt hervorhebt, erheblich größer als die Strahlungsdämpfung sein muß. Auch in großem Abstande von einer Absorptionslinie kämen dann beide Widerstände zur Geltung und es könnte somit die Schwächung des Sonnenlichtes in der Atmosphäre der Rayleighschen Formel nicht folgen, was sie doch, auch der absoluten Größe nach, tut.

Durch die Hypothese von Haas wird das Rätsel des Energieelements mit der Frage nach dem Wesen und der Wirkung der positiven Elektrizität verknüpft und es mag sein, daß diese verschiedenen Fragen erst zugleich ihre vollständige Lösung finden können.

6. Vortrag.

Den Inhalt des heutigen Vortrags wird die Ableitung einer Strahlungsformel bilden. Dieses Problem ist von mehreren Seiten, wie z. B. von Herrn Reinganum, in Angriff genommen worden; hier soll aber nur von der Planckschen Formel die Rede sein.

Planck nimmt als Vermittler des Energieaustausches zwischen Materie und Äther Resonatoren, etwa schwingende Elektronen, an. Es handelt sich dann um die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen einerseits zwischen dem Äther und den Resonatoren, andrerseits zwischen den Resonatoren und den Molekülen. Auf den ersten Punkt, der keine Schwierigkeiten bietet, soll nicht näher eingegangen werden; es genügt, festzustellen, daß die dem Intervall ν, $\nu + d\nu$ entsprechende Energiedichte der schwarzen Strahlung aus der mittleren Energie eines Resonators der Frequenz ν durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$ entsteht.

Es handelt sich also nur um die Frage: wie bestimmt man die mittlere Energie eines Resonators der Frequenz ν? Da man über den Mechanismus des Energieelementes, wie im vorigen Vortrage ausgeführt wurde, zu wenig weiß, so kann man diese Frage nicht direkt angreifen; es wurde ja festgestellt, daß sich die Emission und Absorption eines Energieelementes nicht nach den Gesetzen der Mechanik, dem Hamiltonschen Prinzip, vollziehen kann. Daher bleibt nichts übrig, als zu den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu greifen; man wird sich damit begnügen müssen, die wahrscheinlichste Energieverteilung (die Verteilung größter Entropie) zu berechnen, von der man annimmt, daß die wirkliche von ihr nicht in beobachtbarer Weise abweicht. Zur Darlegung der Methode möge eine Betrachtung aus dem ersten Bande von Boltzmanns Gastheorie eingeschaltet werden, die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung in einatomigen Gasen.

Hierzu entwirft man das folgende Diagramm. Vom Nullpunkte O aus werden so viele Vektoren gezogen, als Moleküle vorhanden sind, und jeder Vektor stellt nach Richtung und Länge die Geschwindigkeit eines Moleküls dar; die Endpunkte der Vektoren heißen „Geschwindigkeitspunkte". Gesucht ist die Verteilung dieser Punkte über das Diagramm.

Boltzmann zerlegt nun das Diagramm in lauter gleich große Volumelemente. Ihre Anzahl sei k, und sie seien von 1 bis k numeriert; die Anzahl der Moleküle sei n. Eigentlich ist k unendlich groß, vorläufig sei es aber als endlich angenommen und der Grenzübergang (gegen den die Mathematiker vielleicht Bedenken äußern könnten) werde bis zum Schlusse verschoben. Wie die Verteilung der Moleküle (wie wir kurz statt „Geschwindigkeitspunkte" sagen wollen) über die Volumelemente geschieht, soll nun durch das Los entschieden werden nach folgender Regel. In einer Urne mögen sich k Arten von Kugeln befinden, die etwa durch die Ziffern von 1 bis k unterschieden sind, von jeder Art gleichviel (es genügte auch von jeder Art eine Kugel zu haben, dann müßte diese nach jedem Zuge in die Urne zurückgelegt werden). Für jedes Molekül wird eine Kugel gezogen; die Nummer der Kugel gibt dann an, in welches Volumelement des Diagrammes das betreffende Molekül kommen soll. Um alle Moleküle unterzubringen, hat man n Züge zu machen; ihre Gesamtheit soll

ein „Versuch" heißen. Derartige Versuche werden nun außerordentlich oft, N mal, wiederholt; jeder Versuch liefert eine bestimmte Verteilung der Moleküle über das Diagramm, und es entsteht die Frage: welche unter den Verteilungen ist die wahrscheinlichste?

Zunächst ist die Wahrscheinlichkeit irgendeiner Verteilung zu berechnen. Es mögen bei dieser n_1 Moleküle im ersten, n_2 Moleküle im zweiten usw., n_k Moleküle im $k$ten Element liegen; es ist also

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n .$$

Dann ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit dieser Verteilung der Wert

$$W = \frac{1}{k^n} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!} .$$

Man kann leicht bestätigen, daß die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten über alle Verteilungen gleich 1 ist. Würde man nun ohne weiteres nach dem Maximum von W fragen, so würde man finden, daß es für $n_1 = n_2 = \cdots n_k$ eintritt, d. h. für eine gleichförmige Verteilung der Moleküle über das Diagramm. In Wirklichkeit können aber nicht alle möglichen Verteilungen eintreten, denn die Gesamtenergie des Gases hat einen vorgeschriebenen Wert ε. Bedeutet ε_1 die dem ersten, ε_2 die dem zweiten usw., ε_k die dem $k$ten Volumelement entsprechende Energie eines Moleküls, so besteht also die Bedingung

$$n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + \cdots + n_k\varepsilon_k = \varepsilon .$$

Auch wenn man diese berücksichtigt, kann man mit dem gleichen Lotteriespiel auskommen, allerdings würde die Ausführung große Geduld erfordern. Denn bei einer großen Zahl von Versuchen wird sich ein falscher Wert der Energie herausstellen, und alle diese Versuche muß man verwerfen; die übrigen, bei denen der Energiewert zufällig stimmt, kann man „gelungene Versuche" nennen. Auch deren Anzahl kann durch genügend häufige Versuche noch beliebig groß gemacht werden. Man kann ferner leicht einsehen, daß die Wahrscheinlichkeiten der gelungenen Versuche den vorhin berechneten Zahlen W zwar nicht gleich, aber proportional sind. Es kann nämlich offenbar die Summe der Zahlen W, erstreckt nur über die „gelungenen Versuche", nicht mehr gleich 1 sein; hat sie den Wert $\frac{A}{k^n}$, so ergibt sich für den gelungenen Versuch die Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{1}{A} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!} .$$

Unter diesen Zahlen, wobei A und n konstant sind, hat man die größte auszusuchen; man hat also den Nenner, oder, was auf dasselbe herauskommt, den Logarithmus des Nenners zu einem Minimum zu machen.

Hier ist noch eine Bemerkung einzuschalten. Gesetzt, das Maximum der Wahrscheinlichkeit trete für die Verteilung $n_{10}, n_{20}, \cdots n_{k0}$ ein, so darf man nicht behaupten, es sei sehr wahrscheinlich, daß sich bei dem Lotteriespiel gerade genau dieses Wertsystem ergibt, sondern nur, daß sich ein von diesem Wertsystem nur wenig verschiedenes ergibt; die Abweichungen werden in den Grenzen $\sqrt{n_{10}}, \sqrt{n_{20}}, \cdots \sqrt{n_{k0}}$ eingeschlossen sein. Für große Werte der Zahlen $n_{10}, n_{20}, \cdots n_{k0}$ werden die Abweichungen relativ geringfügig sein.

Ehe wir die Verteilung $n_{10}, \cdots n_{k0}$ wirklich berechnen, wollen wir eine Verallgemeinerung vornehmen. Dabei ist es angebracht, die Benennungen der mehrdimensionalen Geometrie zu verwenden. Zu einem Gebrauch dieser Ausdrucksweise werden die Physiker ja immer mehr und mehr geführt; es sei nur an die Mechanik von Hertz erinnert, ferner an die in der physikalischen Chemie gebräuchlichen Methoden, bei denen das thermodynamische Potential durch eine Fläche nicht nur im Raume von drei, sondern neuerdings bei Betrachtungen über das Gleichgewicht in Systemen mit einer größeren Zahl von Komponenten, auch von vier oder mehr Dimensionen dargestellt wird.

Das Gas möge aus beliebigen, mehratomigen Molekülen bestehen; jedes derselben sei ein System, das den Gesetzen der Mechanik genügt. Seien $q_1, q_2, \ldots q_s$ die Lagrangeschen Koordinaten eines Moleküls, $p_1, p_2, \ldots p_s$ die entsprechenden Bewegungsmomente. Diese $2s$ Größen deuten wir als Koordinaten in einem $2s$-dimensionalen Raume; dann kann man in genau derselben Weise, wie vorher bei drei Dimensionen, das Verteilungsgesetz bestimmen, indem man den $2s$-dimensionalen Raum in k gleiche Volumelemente zerlegt und durch das Los entscheidet, wie viele Moleküle in jedem Elemente zu liegen kommen. Man erhält dieselbe Formel für die Wahrscheinlichkeit, und es ist wieder die gesamte, hier aus potentieller und kinetischer bestehende Energie ε als gegeben zu betrachten.

Für große Werte von $n_1, n_2, \ldots n_k$ kann man, wenn man im Produkt konstante Faktoren fortläßt, $n_1!$ usw. nach der Stirlingschen Formel ersetzen durch $n_1^{n_1+\frac{1}{2}}$ usw., oder, da $\frac{1}{2}$ klein ist gegen n_1 usw., auch durch $n_1^{n_1}$ usw.

Danach wird die Größe, die man zu einem Minimum zu machen hat,

$$H = n_1 \log n_1 + \cdots + n_k \log n_k .$$

Die Variation davon muß verschwinden:

$$\delta H = (1 + \log n_1)\,\delta n_1 + \cdots + (1 + \log n_k)\,\delta n_k = 0.$$

Zwischen den Variationen $\delta n_1, \ldots \delta n_k$ bestehen die Nebenbedingungen

$$\delta n_1 + \cdots + \delta n_k = 0,$$
$$\varepsilon_1\,\delta n_1 + \cdots + \varepsilon_k\,\delta n_k = 0.$$

Daraus ergibt sich leicht

$$n_\varkappa = C e^{-l\varepsilon_\varkappa}, \quad \varkappa = 1, \ldots k,$$

wobei C, l Konstanten sind.

In dieser Formel sind sowohl das Maxwellsche Verteilungsgesetz, als auch die Boltzmannsche Verallgemeinerung desselben für mehratomige Gase, unter Berücksichtigung äußerer Kräfte, enthalten.

Man findet aus dieser Verteilungsformel leicht, daß bei einem einatomigen Gase die mittlere kinetische Energie eines Moleküls $\frac{3}{2l}$ beträgt.

Wir fassen jetzt zwei Gase, a und b, ins Auge, die im Wärmeaustausch stehen; sie seien etwa durch eine Metallwand getrennt, die so dünn ist, daß man von der in ihr enthaltenen Energie absehen kann. Jedem der Gase kommt eine gewisse Energie ε_a bezw. ε_b zu, deren Summe $\varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon$ vorgeschrieben ist; es erhebt sich die Frage, wie sich die Energie auf beide Gase verteilt. Um sie zu beantworten, könnte man so vorgehen, daß man erst ε_a und ε_b willkürlich annimmt und die Wahrscheinlichkeit der Verteilungen in jedem Gase für sich berechnet; sind die Maximalwerte dieser Wahrscheinlichkeiten W_a und W_b, so wird die Wahrscheinlichkeit der vorausgesetzten Verteilung der Energie auf beide Gase $W_a W_b$ sein, und man hätte das Maximum hiervon aufzusuchen. Doch würden sich auf diesem Wege Schwierigkeiten ergeben, weil man berücksichtigen muß, daß der oben eingeführte Faktor A noch von der Energie des betreffenden Gases abhängt.

Ein anderer Weg, der bequemer ist, ist der, daß man auf einmal durch das Los die Verteilung für beide Gase zugleich bestimmt. Das Gas a möge n_a Moleküle, das Gas b möge n_b Moleküle haben, so daß

$$n_a + n_b = n$$

ist. Jedem Gase kommt ein Geschwindigkeitsdiagramm zu, das wir in k bezw. k' gleiche Volumelemente zerlegen. Jedem Element entspreche eine Kugel; diese $k + k'$ Kugeln legen wir in eine Urne. Für jedes Molekül wird ein Zug getan und nach dem Zuge die Kugel zurückgelegt. Eine große Anzahl Züge aber werden von vornherein als unbrauchbar verworfen, nämlich jedesmal, wenn bei einem Zuge für ein Molekül des ersten Gases eine Kugel herauskommt, die einem Molekül des zweiten Gases entspricht, und umgekehrt. Hat man für alle n Moleküle einen brauchbaren Zug getan, werden diese Kombinationen noch immer keinen „gelungenen Versuch" darstellen, außer wenn auch die Gesamtenergie gerade den richtigen Wert bekommt. Man sieht, daß nur ein leidenschaftlicher Spieler genügende Geduld aufbringen wird, um eine große Anzahl gelungener Versuche fertigzustellen.

Die Wahrscheinlichkeit eines gelungenen Versuches, bei welchem die Verteilung der beiden Gase über ihre Geschwindigkeitsdiagramme durch die Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_k$ bezw. $n_1', n_2', \ldots n_{k'}'$ ausgedrückt wird, ergibt sich leicht proportional zu

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_k!\, n_1'! \ldots n_{k'}'!}.$$

Der Logarithmus des Nenners, oder, wie man auch sagen kann, die Größe

$$H = n_1 \log n_1 + \cdots + n_k \log n_k + n_1' \log n_1' + \cdots + n_{k'}' \log n_{k'}'$$

ist zum Minimum zu machen unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n_a,$$
$$n_1' + n_2' + \cdots + n_{k'}' = n_b,$$
$$n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + \cdots + n_k\varepsilon_k + n_1'\varepsilon_1' + n_2'\varepsilon_2' + \cdots + n_{k'}'\varepsilon_{k'}' = \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich für jedes Gas dasselbe Verteilungsgesetz wie für ein einzelnes; die Gleichgewichtsbedingung aber besteht darin, daß die mittlere kinetische Energie $\frac{3}{2l}$ für beide Gase den gleichen Wert hat.

Unsere Betrachtung hat uns zu gleicher Zeit das Boltzmannsche H-Theorem geliefert.

Diese Methode wenden wir dazu an, das Gleichgewicht zwischen den Planckschen Resonatoren und den Molekülen zu finden. Die von Planck gegebene Ableitung seines Gesetzes ist von diesem Wege etwas verschieden.

Es mögen n' Gasmoleküle und n Resonatoren von einer bestimmten Frequenz ν vorhanden sein, für welche das Energieelement q einen bestimmten Wert besitze.

Dem Gase können wir nun wieder ein Geschwindigkeitsdiagramm mit k' Volumelementen zuordnen.

Bei den Resonatoren unterscheiden wir k Fälle (übrigens wird die Zahl k ebenso wie k' schließlich unendlich groß): Im 1. Falle soll der Resonator nichts erhalten, im 2. Falle soll er ein Energieelement erhalten, im 3. Falle zwei Energieelemente usf., im letzten, $k$ten Falle $k-1$ Energieelemente.

Die Verteilung bestimmen wir wieder durch das Los. In der Urne befinden sich $k' + k$ Kugeln; ein Zug für ein Gasmolekül hat nur Gültigkeit, wenn eine der ersten k' Kugeln her-

auskommt, ein Zug für einen Resonator nur, wenn eine der letzten k Kugeln herauskommt. Außerdem werden noch alle Züge verworfen, bei denen die Gesamtenergie nicht stimmt. Daraus geht hervor, daß die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Resultates denselben Ausdruck haben muß, wie oben bei zwei Gasen. Sind also n_1', $n_2', \ldots n_{k'}'$ die Anzahlen der Gasmoleküle, die bei einem Versuche den verschiedenen Elementen zukommen, $n_1, n_2, \ldots n_k$ die Anzahlen der Resonatoren, für welche sich die verschiedenen Fälle ergeben, so ist die Größe, die ein Minimum werden soll:

$$H = n_1' \log n_1' + \cdots + n_{k'}' \log n_{k'}' + n_1 \log n_1 + \\ + \cdots + n_k \log n_k .$$

Die Nebenbedingungen lauten hier:

$$n_1' + \cdots + n_{k'}' = n', \\ n_1 + \cdots + n_k = n, \\ n_1' \varepsilon_1' + \cdots + n_{k'}' \varepsilon_{k'}' + \\ + (n_2 + 2n_3 + \cdots + (k-1) n_k) q = \varepsilon .$$

H wird zum Minimum für die Verteilung

$$n_{\varkappa'}' = C' e^{-l \varepsilon_{\varkappa'}'}, \quad \varkappa' = 1, \ldots k', \\ n_\varkappa = C e^{-l(\varkappa-1)q}, \quad \varkappa = 1, \ldots k,$$

wo C, C', l Konstanten sind.

Für diesen wahrscheinlichsten Zustand berechnen wir jetzt die mittlere Energie eines Gasmoleküls und die eines Resonators. Für erstere findet man leicht $\frac{3}{2l}$. Letztere ist offenbar gleich

$$\frac{n_2 + 2n_3 + \cdots + (k-1) n_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} q ;$$

setzt man hier die für $n_\varkappa$ gefundenen Werte ein, so erhält man in Zähler und Nenner einfache Reihen, die für $k = \infty$ gehörig konvergieren, und der Ausdruck geht über in

$$\frac{q}{e^{lq} - 1} .$$

Nun ist die mittlere Energie eines Gasmoleküls der absoluten Temperatur proportional; Planck setzt

$$\frac{3}{2} kT = \frac{3}{2l},$$

also

$$l = \frac{1}{kT} .$$

Nimmt man ferner das Energieelement proportional der Schwingungszahl ν an, $q = h\nu$, so findet man schließlich für die mittlere Energie eines Resonators die Plancksche Formel

$$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} .$$

Es ist nicht zu leugnen, daß in dieser Ableitung eine gewisse Willkür steckt; denn man kann ein solches Lotteriespiel nach verschiedenen Grundsätzen einrichten. Man erkennt diese Willkür auch aus folgendem Umstande. Nach unseren Betrachtungen stellt $\frac{q}{e^{lq} - 1}$ die mittlere Energie eines Gebildes vor, das Energie nur in vollen Portionen q aufnehmen kann; man könnte erwarten, daß man hieraus die mittlere Energie eines Gasmoleküls bekäme, wenn man q unendlich klein werden läßt; in der Tat erhält man aber dann in der Grenze $\frac{1}{l}$ statt des richtigen Wertes $\frac{3}{2l}$. Die bestimmte Annahme, die wir über die Verlosung gemacht haben, ist also theoretisch nicht zu begründen; sie ist ein Notbehelf, der nicht zu umgehen ist, weil wir die wirklichen Vorgänge nicht kennen.

Eine andere Einkleidung dieser Theorie kann man mit der statistischen Mechanik von Gibbs gewinnen. Um zu bestimmen, wie sich bei einer gegebenen Temperatur ein Körper (etwa ein Gas) verhält, der auch unter der Wirkung äußerer Kräfte stehen kann, denkt sich Gibbs das System sehr viele Male wiederholt; so erhält er ein ganzes Ensemble von gleichbeschaffenen Systemen, wobei er aber alle möglichen Zustände zuläßt. Das ganze System habe s Koordinaten q und s Bewegungsmomente p, wo die Zahl s ungeheuer groß ist; jedem Zustand entspricht dann ein Punkt im $2s$-dimensionalen Raume $q_1, \ldots p_s$.

Gibbs betrachtet nun eine ganz bestimmte Verteilung der Punkte in diesem Raume, die er ein „kanonisches Ensemble" nennt; dasselbe wird so definiert, daß die Anzahl der Systeme, die in einem Element $d\lambda$ des $2s$-dimensionalen Raumes liegen, gleich

$$N e^{\frac{\Psi - \varepsilon}{\Theta}} d\lambda$$

ist, wo N die Anzahl aller Systeme und ε die Energie eines Systems ist. Von den Konstanten Ψ, Θ spielt die letztere die Rolle der Temperatur. In diesem Verteilungsgesetz ist die Hypothese ausgedrückt, daß Systeme von sehr großer Energie wenig vorkommen.

Man kann nun die Annahme machen, daß irgendeine physikalische Größe (z. B. die Anzahl der Moleküle in der unteren Hälfte des Gasraumes) durch den Mittelwert über alle Systeme des Ensembles gemessen wird. Auf diese Weise bekommt man in der Tat alle Sätze der kinetischen Gastheorie; zwar ist die Methode kühn — denn sie läßt sich höchstens plausibel machen, nicht beweisen —, aber sie hat den Vorteil, daß man prinzipiell jedes Problem des thermischen Gleichgewichts lösen kann. Man hat sie auf viele Erscheinungen, z. B. auf dissoziierte Gase, auf die Magnetisierung eines Körpers usw., ange-

wandt, und man ist in allen untersuchten Fällen zu richtigen Resultaten gekommen.

Wendet man die Gibbssche Methode auf den Fall der Strahlung an, so wird man ein kanonisches Ensemble konstruieren müssen, dessen Systeme aus dem ponderablen Körper samt den Resonatoren der Frequenz ν bestehen; für die Verteilung kann man den Ausdruck

$$Ne^{\frac{\Psi-\varepsilon-(r_1+r_2+\ldots)q}{\Theta}}d\lambda$$

annehmen, wo ε die Energie des ponderablen Körpers allein ist und $r_1, r_2, \ldots$ die Anzahlen der Energieelemente bedeuten, die auf den ersten, zweiten usw. Resonator fallen. Berechnet man wieder die mittlere Energie eines Moleküls des Körpers und eines Resonators, so gelangt man zur Planckschen Formel.

Wenn die beiden Methoden auch verschieden aussehen, so hängen sie doch zusammen. Das Bindeglied ist das, was Gibbs ein „mikrokanonisches Ensemble" nennt, ein Begriff, der mit der Boltzmannschen „Ergode" identisch ist.

Das mikrokanonische Ensemble erhält man als Grenzfall aus dem kanonischen. Man kann nämlich in einfachen Fällen beweisen und in andern — glauben, daß, wenn die Anzahl der Bestimmungsstücke sehr groß ist, alle die Systeme repräsentierenden Punkte in der Nähe einer Fläche, nämlich $\varepsilon =$ const, des $2s$-dimensionalen Raumes zusammengedrängt sind. Denkt man sie sich wirklich nur auf dieser $(2s-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit in geeigneter Weise verteilt, so hat man eine „mikrokanonische" Verteilung vor sich; hier ist allen Systemen dieselbe Energie ε vorgeschrieben.

Dieses mikrokanonische Ensemble aber ist nun der ersten, Boltzmannschen Betrachtungsweise äquivalent. Betrachtet man nämlich z. B. ein einatomiges Gas von n Molekülen, und achtet man nur auf die Geschwindigkeitskomponenten, nicht aber auf die Lagen, so entspricht nach der Boltzmannschen Methode jedem Versuche eine bestimmte Verteilung der n Moleküle auf die k Volumelemente des dreidimensionalen Geschwindigkeitsdiagramms. Statt dieses einen zeichnen wir nun aber n Diagramme, für jedes Molekül eins, derart, daß jedes Diagramm nichts weiter zeigt, als in welchem Volumelemente das betreffende Molekül bei dieser Verteilung liegt. Alle diese n 3-dimensionalen Räume fassen wir nun zu einem $3n$-dimensionalen Raume zusammen, dessen „Projektionen" sie bilden. Das ist dann der Gibbssche vieldimensionale Raum, denn in ihm wird offenbar eine Verteilung, d. h. der Zustand des ganzen Systems, durch einen einzigen Punkt charakterisiert. Das Volumelement von Gibbs ist das Produkt von n Boltzmannschen Volumelementen. Um jetzt ein mikrokanonisches Ensemble zu bekommen, hat man nur die Verteilungen als gültig anzusehen, wo die Energie den richtigen Wert ε hat; die zugehörigen Punkte liegen also im $3n$-dimensionalen Raume auf der Fläche $\varepsilon =$ konst, und wenn wir bei unserem Lotteriespiel die Wahrscheinlichkeit jeder Kombination, die das richtige ε gab, als gleich groß angesehen haben, so läuft das darauf hinaus, daß zwischen den Anzahlen der Systeme, die den verschiedenen Elementen der ε-Fläche entsprechen, gerade die Verhältnisse bestehen, die für ein mikrokanonisches Ensemble charakteristisch sind. Das ist der Zusammenhang zwischen den Methoden von Gibbs und Boltzmann.

Bei alledem muß es das Ziel bleiben, die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen durch die Betrachtung der realen Vorgänge zu ersetzen, wie denn auch Boltzmann sein H-Theorem bewies, indem er zeigte, daß die Größe H wirklich immer ihrem kleinsten Werte zustrebt. Ferner bleibt die Aufgabe, die Proportionalität des Energieelements q mit der Frequenz ν zu verstehen; daß keine andere Annahme, etwa q proportional ν^2, zulässig ist, folgt daraus, daß die Plancksche Formel dann nicht das Wiensche Verschiebungsgesetz ergeben würde.

Es bleiben für die Zukunft noch manche Rätsel zu lösen.

(Eingegangen 2. November 1910.)

BESPRECHUNGEN.

E. Fabry, Problèmes et exercices de mathématiques générales. gr. 8. 420 S. Paris, A. Hermann et fils, 6, rue de la Sorbonne. 1910. 10 fr.

Die Sammlung enthält in einem ersten Teil 739 Aufgaben aus der Algebra, analytischen Geometrie, Analysis und Mechanik. Der zweite Teil gibt die ausgeführten Lösungen dieser Aufgaben.

Die Aufgaben sind durchgängig dem Anschauungskreis der reinen Mathematik entnommen. Sie bieten dem Studierenden der ersten Semester ein sehr brauchbares Übungsmaterial auch neben den bekannten Aufgabensammlungen von Sohncke-Amstein, Dölp und der neuerdings erschienenen Sammlung von Dingeldey, welche, den neueren Tendenzen des mathematischen Unterrichts entsprechend, vor allem die Anwendungen der Mathematik berücksichtigt.

Sommer.

Wa. Ostwald, Schule der Elektrizität. Gemeinverständliche Darstellung der Elektrik und ihrer Anwendungen nach den modernen Anschauungen, und Plaudereien über die neuen Strahlungen. Nach **G. Claude, L'Electricité pour tout le monde** für Deutschland bearbeitet. Mit über 400 Abbildungen im Text. 8. XI u. 579 S. Leipzig, Dr. Werner Klinkhardt. 1910. M. 8.—, gebunden M. 10.—

Der Verfasser hat es meisterhaft verstanden, den umfangreichen und teilweise recht schwierigen Stoff in einer Weise darzustellen, daß jeder Gebildete aus dem Werke eine Fülle der Belehrung und Anregung gewinnen kann. Dabei hat der Verfasser sowohl die Szylla des lehrhaften Tones, als auch die Charybdis der Seichtheit in glücklichster Weise umschifft. Geradezu spielend lernt der Leser die schwierigsten Probleme beherrschen, und der Verfasser versteht es, durch seine Schreibweise ihn dauernd an das Buch zu fesseln. — Ich habe den Herrn Bearbeiter des Claudeschen Originals hier mit Vorbedacht als Verfasser bezeichnet. In der vorliegenden Bearbeitung ist das Buch nämlich so durchaus deutsch und in seiner ganzen Durchführung so einheitlich gestaltet, daß man beim Durchlesen vollkommen vergißt, die Umgestaltung eines ursprünglich französischen Werkes vor sich zu haben. Herr Ostwald darf für sich das Lob in Anspruch nehmen, nicht sowohl das Buch von Claude deutsch bearbeitet, als vielmehr nach den durch den französischen Autor gegebenen Anregungen ein deutsches Buch von Grund auf neu geschaffen zu haben. — Sicherlich wird es dem wertvollen Buche nicht an dem wohlverdienten Absatze fehlen. Dann wird der vorliegenden Auflage wohl bald die zweite folgen, in der dann auch die jetzt leider noch recht zahlreichen Druckfehler — die übrigens der aufmerksame Leser leicht als solche erkennen wird — beseitigt sein dürften. Zum Schlusse möchte ich nicht versäumen, allen daran Beteiligten für die prächtige Ausstattung des Buches uneingeschränktes Lob zu spenden. Max Iklé.

K. Kraus, Methodik der Naturlehre. Anleitung zur Erteilung des Unterrichts in Volks- und Bürgerschulen und Fortbildungsschulen. gr. 8. 184 S. mit 38 Abbildungen. Wien, A. Pichlers Wwe. & Sohn. 1910. M. 3.—, gebunden M. 3.50

Das Buch ist für Volks- und Bürgerschulen bestimmt. Vieles davon ist natürlich auch auf höheren Schulen verwendbar. Nach einleitenden allgemeinen Bemerkungen zeigt der Verfasser an einzelnen Beispielen, wie er sich das Lehrverfahren denkt. Es legt Zeugnis dafür ab, daß man auch hier bestrebt ist, den naturwissenschaftlichen, besonders physikalischen Unterricht immer mehr zu vertiefen und nutzbringend zu gestalten. Auch hier werden Schülerversuche für die Oberstufe gefordert und ebenfalls Beispiele angegeben. Kochan.

Felix Auerbach, Geschichtstafeln der Physik. IV u. 150 S. Leipzig, J. A. Barth. 1910. Geb. M. 5.—

Bei der überaus raschen Entwickelung, welche die Physik in den letzten 100 Jahren durchlaufen hat, ist es selbstverständlich, daß ein Unternehmen, wie das vorliegende — nämlich „historische" Arbeiten zusammenzustellen —, um so schwieriger wird, je erwünschter gerade ein klares Urteil über die Bedeutung einzelner physikalischer Leistungen für den allgemeinen Fortschritt physikalischer Erkenntnis ist. Von diesem Standpunkte aus dürfte das Werk wohl lebhaftem Einspruch begegnen. Zu entscheiden, was bis zum Jahre 1900 in der Physik historisch geworden ist, das ist schlechterdings unmöglich. Manches, was jetzt wertlos scheint, kann in 100 Jahren den Anstoß zu einer großen Entdeckung geben und dadurch historisch werden. Trotz dieses, ja selbstverständlichen Sachverhaltes, wird das Buch dem Physiker sehr gute Dienste leisten. Nicht nur für Vorlesungen, Vorbereitungen auf Prüfungen usw., sondern als anregende Lektüre, namentlich bei Literaturstudien. Ein rascher chronologischer Überblick, selbst wenn er zum Teil sehr unvollständig ist, kann oft mehr wert sein, als ein Zusammensuchen von Zitaten aus Spezialreferaten. Insofern steht sogar zu vermuten, daß sich das Buch trotz allem, was sich dagegen sagen läßt, zu einem wertvollen Nachschlagewerk noch entwickeln wird; und es wäre in dieser Hinsicht auch gut, wenn der Verfasser das im Konzept vorliegende Material bis auf die neueste Zeit, trotz der Willkürlichkeit, die ihm anhaften wird, der Öffentlichkeit übergäbe.

Die Inhaltsgliederung ist diese:

I. Tafel wichtiger Fortschritte in der gesamten Physik, mit Angabe des Jahres und des Urhebers. (Beginnt 650 v. Chr.).
II. Tafel ausgewählter physikalischer Bücher mit Jahr und Ort des Erscheinens (von 350 v. Chr. ab).
III. Tafel ausgewählter Physiker mit Angabe von Geburts- und Todesjahr. (Anfang 560 v. Chr.).
IV. Alphabetisches Register zu Tafel I.

Die einzelnen Daten sind kurz und prägnant.

H. Hörig.

---

1. **Kolloidchemische Beihefte** (Ergänzungshefte zur Kolloid-Zeitschrift). Monographien zur reinen und angewandten Kolloidchemie, herausgegeben von Wo. Ostwald. Bd. I, Heft 1 u. 2. Dresden, Theodor Steinkopff. 1909. Preis für den Band von etwa 30 Bogen M. 12.—, für das Einzelheft M. 1.20

2. **Johann v. Schroeder, Zur Kenntnis des Gerbprozesses.** Sonderausgabe aus den Kolloidchemischen Beiheften. Dresden, Theodor Steinkopff. 1909. Geheftet M. 1.50

Die „Kolloidchemischen Beihefte", die eine Ergänzung der seit einigen Jahren in demselben Verlage erscheinenden, ebenfalls unter der Redaktion von Wo. Ostwald stehenden „Zeitschrift für Chemie und Industrie der Kolloide" darstellen, sind dazu bestimmt, umfassendere Arbeiten monographischen Charakters, die ihres Umfanges wegen für die genannte Zeitschrift weniger geeignet sind, zu veröffentlichen. Das vorliegende erste Doppelheft enthält zwei Arbeiten, eine von Johann v. Schroeder, „Zur Kenntnis des Gerbprozesses", die auch, wie aus dem Kopf dieser Besprechung hervorgeht, als Sonderabdruck einzeln käuflich ist, und eine zweite von Hans Mayer, „Über eine elektrische Methode zur Messung der durch Belichtung in Chromgelatineschichten verursachten Veränderungen". Da die erste Arbeit ihrem Inhalte nach den Lesern dieser Zeitschrift ziemlich fern liegt, begnüge ich mich damit, hier nur auf die auch für

den Physiker interessante Untersuchung von Mayer hinzuweisen, deren Hauptergebnis sich dahin zusammenfassen läßt, daß die — von dem Feuchtigkeitsgehalte und der Temperatur stark abhängige — elektrische Leitfähigkeit der Chromatgelatine durch die Belichtung stark vermindert wird, und zwar ist „die prozentuelle Änderung der Leitfähigkeit für den Einfluß der Belichtung eine charakteristische Größe". Die durch die prozentuelle Änderung der Leitfähigkeit definierte Lichtempfindlichkeit der Chromatgelatine hängt von dem Alter der Platte ab. Die durch die Belichtung veranlaßten Leitfähigkeitsänderungen setzen sich auch nach dem Verdunkeln noch eine Zeitlang fort.

Ich denke, sofern sich mir dazu Gelegenheit bietet, nach Abschluß des ersten Bandes auf die neue Zeitschrift an dieser Stelle zurückzukommen.

Werner Mecklenburg (Clausthal i. H.).

Hans Schmidt, Die Standentwicklung und ihre Abarten für den Amateur- und Fachphotographen. (Enzyklopädie der Photographie, Heft 69.) IV u. 78 S. Halle a. S., W. Knapp. 1909. M. 2.40

Die Standentwicklung ist die Methode der Entwicklung, bei welcher durch große Verdünnung die Dauer des Prozesses über Stunden, statt über Minuten ausgedehnt wird. Die Platte befindet sich dabei stehend im Entwicklungstrog. Über die Zweckmäßigkeit des Verfahrens hat der Verf. eigene Versuche angestellt. Er kommt dabei zu folgenden Resultaten: Das Verfahren empfiehlt sich für alle Amateure, welche die gewöhnliche Entwicklung mit allen ihren Feinheiten nicht vollständig beherrschen, für alle Arbeiten, bei welchen man etwas harte Negative vermuten muß, für alle Fälle, wo es sich darum handelt, eine große Anzahl von Negativen sowie von Diapositiven und Bromsilberkontaktdrucken möglichst schnell und möglichst billig zu entwickeln, für den Fachmann schließlich für seine gewöhnlichen, unter bekannten und stets gleichbleibenden Licht- und anderen Verhältnissen zustande kommenden Arbeiten. In anderen Fällen möge man die übliche Methode der Entwicklung beibehalten. Die praktischen Anweisungen zur Handhabung der Methode enthalten Ausführungen über die Standentwicklergefäße, den Entwickler, die Entwicklungsdauer, die Ausführung der Entwicklung und die besonderen hier auftretenden Fehlererscheinungen. Byk.

E. Philippi, Über Ausschaltvorgänge und magnetische Funkenlöschung. Mit 48 Fig., 3 Lichtbildern u. 14 Oszillogrammen. 62 S. Berlin, Leonhard Simion Nf. 1910. M. 3.50

Diese im Februar 1908 abgeschlossene, mit einer großen Anzahl sauberer Kurven und Zeichnungen ausgestattete umfangreiche Arbeit bezweckt die physikalische Fundierung der Konstruktionsprinzipien der Schalter. Nach einer eingehenden Referierung der einschlägigen Literatur und dem Versuch, die vorliegenden Lichtbogentheorien auf die in Frage kommenden Verhältnisse zu erweitern — die Sache erweist sich als sehr kompliziert —, beschreibt der Verfasser Versuche über die Schalterstromstärke als Funktion der Lichtbogenlänge in Abhängigkeit von Geschwindigkeit, Material, Masse und Form der Elektroden bei verschiedenen Spannungen und Anfangsstromstärken. Ein zweiter Teil befaßt sich in analoger Weise mit der magnetischen Funkenlöschung, während ein Anhang die technische Diskussion bringt. Die Schrift ist für den Physiker und den Konstrukteur gleicherweise von Interesse. H. Hörig.

L. Barbillion, Les Compteurs Électriques à courants continus et à courants alternatifs. Leçons professées à l'institut électrotechnique de Grenoble. Avec la collaboration de G. Ferroux. kl. 8. 226 S. Paris, Gauthiers-Villars. 1910. Frcs 3.25

Unter Verzicht auf alle historischen Weitschweifigkeiten wird in diesem kleinen Buche in kurzer eleganter Darstellung über die verschiedenen Systeme eine moderne Übersicht gegeben, deren Schwerpunkt auf theoretischer Seite liegt. Das Werk dürfte als Ergänzung zu anderen, mehr technisch gehaltenen Darstellungen dieses Gegenstandes sehr willkommen sein. Übrigens legt der Verfasser Wert auf die Diskussion der Fehlerquellen und behandelt mit Sorgfalt die Eichung der Instrumente. H. Hörig.

Friedrich Dannemann, Aus der Werkstatt großer Forscher. Allgemeinverständliche erläuterte Abschnitte aus den Werken hervorragender Naturforscher aller Völker und Zeiten. Dritte Auflage des ersten Bandes des „Grundriß einer Geschichte der Naturwissenschaften". Mit 62 Abbildungen im Text und einer Spektraltafel. 8. XII u. 430 S. Leipzig, Wilhelm Engelmann. 1908. M. 6.—, in Lbd. M. 7.—

Die Vorzüge dieses Buches sind aus den früheren Auflagen bekannt genug, um jedes Wort der Empfehlung überflüssig zu machen. Der Inhalt ist durch sieben neue Abschnitte vermehrt worden. Diese sind: „Kepler begründet die neuere Optik", „Newton entwickelt die Prinzipien der Naturlehre", „Das Auftauchen der ersten klaren Vorstellungen über die Verbrennung und die Atmung", „Die photometrischen Grundbegriffe", „Es werden die experimentellen Grundlagen für die elektromagnetische Theorie des Lichtes gewonnen", „Die Entdeckung des Diamagnetismus", „Das Protoplasma wird als die Grundlage des organischen Lebens erkannt". Max Iklé.

H. Dreisbach, Die Telegraphen-Meßkunde. „Telegraphen- und Fernsprechtechnik in Einzeldarstellungen", Bd. 3. Mit 146 Abbildungen im Text und 1 Figurentafel. 8. XI u. 172 S. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1908. M. 6.—, in Lwbd. M. 7.—

Wenn dieses Buch auch in erster Linie für Telegraphen-Fachleute bestimmt ist, so erscheint es doch auch für den Physiker wertvoll durch die ausführliche Behandlung der Meßmethoden und der einschlägigen Apparate. Auch die zahlreichen Literaturangaben sind mit Freuden zu begrüßen. Max Iklé.

Berichtigungen.

zu der Arbeit: Die Berechnung der Molekül-dimensionen aus Radiometerbeobachtungen von P. Debye.

Die in der Überschrift genannte Arbeit gelangte in dieser Ztschr. 11, 1115, 1910 zum Abdruck, leider ohne vorherige Korrektur. Sie enthält dadurch folgende, wesentlichere Druckfehler:

Im § 1 lese man statt τ_1 und τ_0 überall T_1 und T_0; im § 2 werden nur die ersten beiden Formeln von dieser Korrektur betroffen.

In den Formeln (19), (20) und (20′) setze man an Stelle von π den Wert $\frac{\pi}{2}$.

In Formel (21) tritt im rechten Gliede der Faktor m hinzu.

Die drei Zeilen oberhalb der Formel (22′) ersetze man durch das Folgende:

„Benutzen wir weiterhin noch die Zusammenhänge zwischen A_0 und A_1 einerseits und A andererseits, welche analog wie (12) abgeleitet werden und die Form annehmen

$$A_0 = A, \quad A_1 = \frac{e^{\frac{a}{T_0}} T_0^2}{T_1^2 + T_0^2 (e^{\frac{a}{T_0}} - 1)},$$

so kommt":

In dem auf Formel (25) folgenden Texte ist überall c durch den in dieser Formel definierten Wert C zu ersetzen.

Nachtrag zu meiner Note über das Maxwellsche Verteilungsgesetz.

Von W. Lenz.

Die Note[1]) ist ohne Korrektur gedruckt worden; es ist hauptsächlich folgendes zu berichtigen bezw. hinzuzusetzen:

S. 1176, Sp. 2, Zeile 18 von oben ließ: $mc\,dc$ statt dc.

S. 1177, Sp. 1, Zeile 23 von unten ließ: An der Verteilungsfunktion wird jetzt nichts geändert, wenn man etwa Moleküle der Gattung ν_1 mit solchen der Gattung ν_2 vertauscht.

Nach dem Ausdruck:

$$v_E = \frac{N!}{\nu_1! \ldots \nu_M!}\, d\Lambda$$

ist hinzuzufügen: Man kann sich dies im dreidimensionalen Raum leicht so veranschaulichen. Ein Punkt habe drei voneinander verschiedene Koordinaten a, b, c; vertauscht man diese untereinander so oft es möglich ist, so erhält man insgesamt $3! = 6$ Punkte. Sind dagegen zwei der Koordinaten einander gleich, so fallen je zwei dieser Punkte zusammen, und es bleiben $3!/2! = 3$ Punkte übrig. Für $a = b = c$ fallen endlich auch diese drei Punkte entsprechend $3!/3! = 1$ in einen zusammen.

Für das Obige hat man statt der drei Koordinaten die N ξ-Koordinaten $\xi_1 \ldots \xi_N$ zu nehmen und mit ihnen zugleich die entsprechenden η- und ζ-Koordinaten zu vertauschen, wobei je $\nu_1 \ldots \nu_M$ dieser Koordinaten einander gleich sind.

---

1) Diese Zeitschr. 11, 1175, 1910.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Ingenieur Ach. Grégoire zum Direktor der Station für landwirtschaftliche Chemie und Physik in Gembloux, der Professor der Mathematik und Astronomie an der Universität Durham R. A. Sampson zum Astronomer Royal für Schottland und Professor der Astronomie an der Universität Edinburg, der Chemiker Dr. phil. Franz Marshall zum Vorsteher des Chemischen Versuchs-Laboratoriums am Landwirtschaftlichen Institut der Universität Halle, Dr. phil. Emil Silbernagel zum Kustos der Sternwarte in München.

Berufen: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Kiel Dr. Lothar Heffter hat einen Ruf in gleicher Eigenschaft an die Universität Freiburg i. B. angenommen.

Verliehen: Dem ord. Professor der chemischen Technologie an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Eduard Donath der Titel Hofrat, dem Privatdozenten für Physik an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Hermann Sieveking und dem Privatdozenten für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Braunschweig Dipl. Ing. Hugo Mosler der Titel Professor, dem ord. Professor für chemische Technologie an der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Otto Reinke der Titel Geheimer Hofrat.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig Geheimer Rat Dr. Carl Neumann.

Gestorben: Der Professor der Mathematik an der Universität Paris Jules Tannery, der Chemiker Professor A. Werner Cronquist in Stockholm, der frühere ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt Geheimrat Dr. Siegmund Gundelfinger, der frühere Professor der technischen Chemie an der Ecole centrale des arts et manufactures in Paris Camille Vincent.

Gesuche.

Realschulprofessor,

Physiker, **sucht,** um sich ausschließlich in seiner Fachwissenschaft betätigen zu können, eine entsprechende Stellung. Angebote unter **S. H. 336** an die Expedition dieser Zeitschrift erbeten.

Am **1. April n. J.** ist am **Technikum Mittweida** eine pensionsberechtigte

Lehrerstelle

für Physik und Mechanik

zu besetzen; erwünscht sind Kenntnisse in der Elektrotechnik. Den Bewerbungen sind Zeugnisabschriften und Lebenslauf beizufügen.

Direktion des Technikum Mittweida.
Prof. A. Holzt.

Das **Militärversuchsamt Berlin-Jungfernheide** (Postamt Plötzensee) **sucht** einen

promovierten Physiker.

Jahresvergütung 2100 M. Bewerbern werden auf Wunsch die Einstellungsbedingungen übersandt.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Friedrich Krüger in Danzig-Langfuhr. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

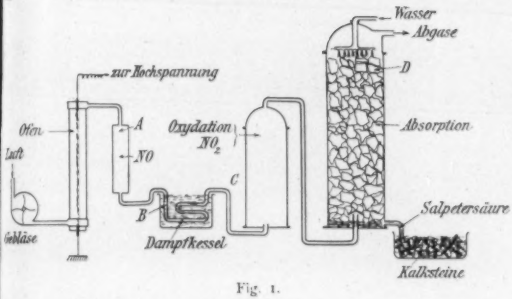


Fig. 1.

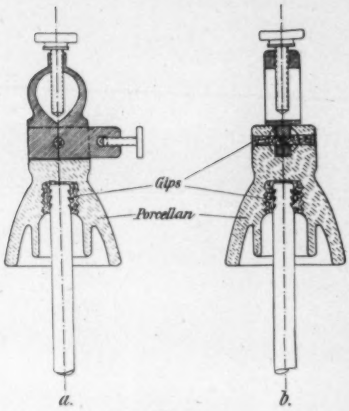


Fig. 5.

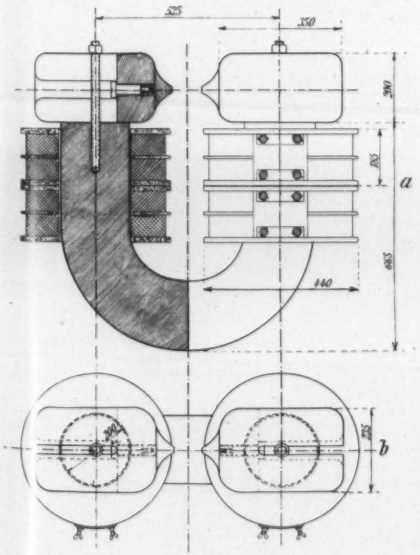


Fig. 6.

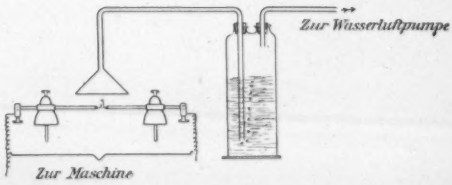


Fig. 2.

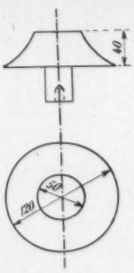


Fig. 7.

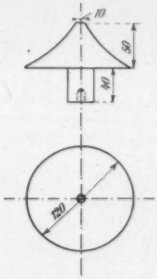


Fig. 8.

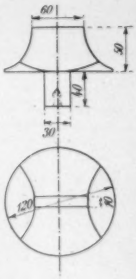


Fig. 9.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

SMITH COLLEGE LIBRARY

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY

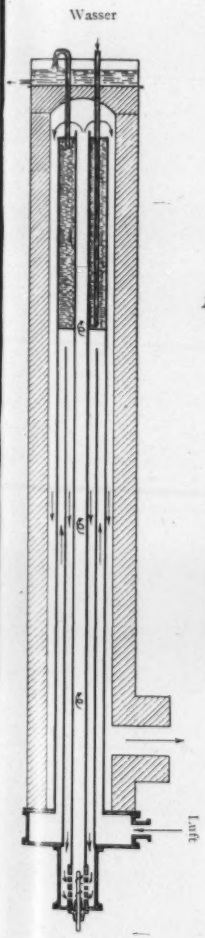


Fig. 17.

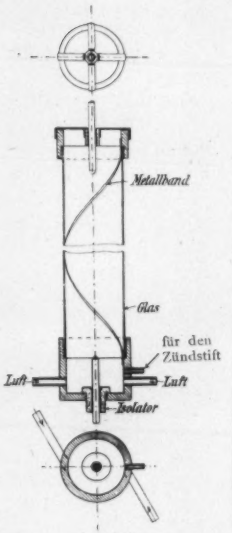


Fig. 16.

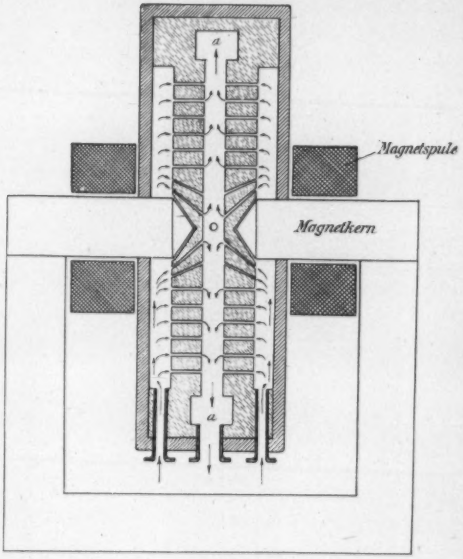


Fig. 10.

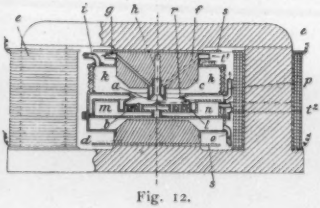
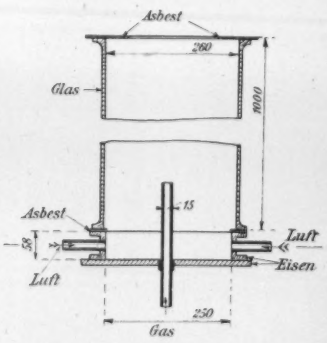


Fig. 12.



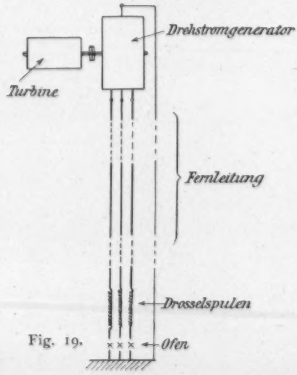


Fig. 19.

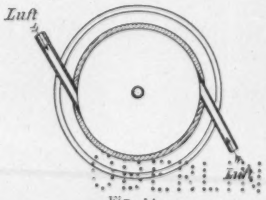


Fig. 14.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

COLLEGE LIBRARY

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY

Fig. 3.

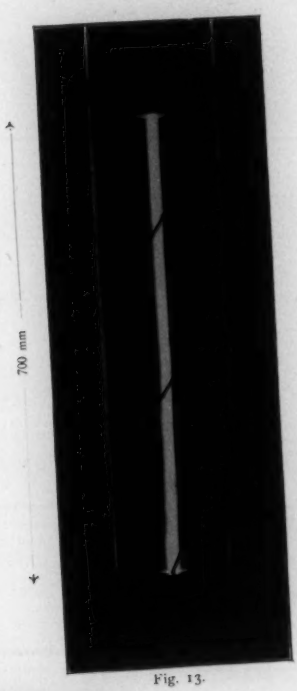


Fig. 13.

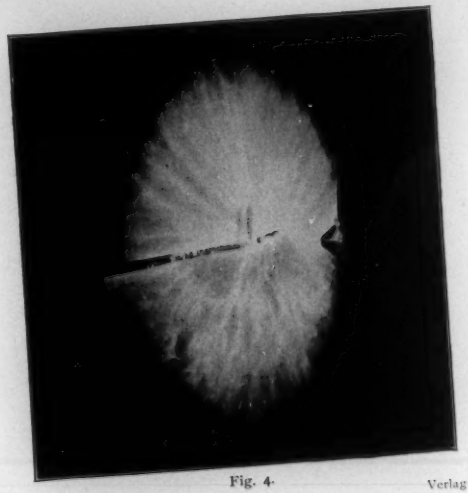


Fig. 4.

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY

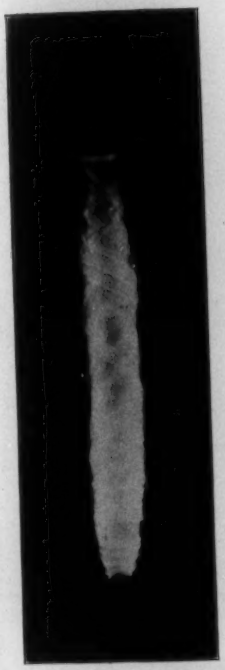


Fig. 15a.

Fig. 15b.

Fig. 18.

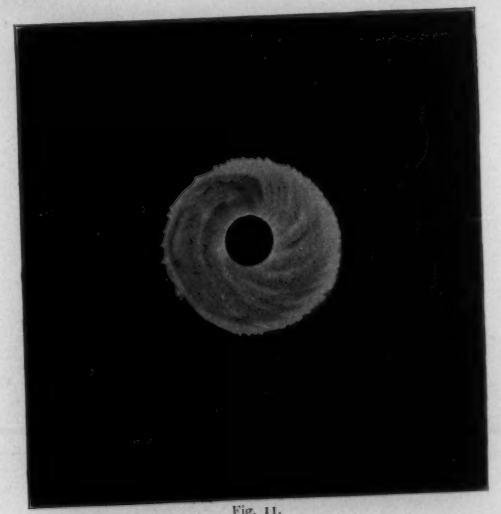


Fig. 11.

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY